

الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

٥ ٣ ٤ ٥

# دليل المدرس

٣ ٣

# لمادة الرياضيات

الجزء الثاني

الصف الثالث الثانوي العلمي



٢٠١٦ - ٢٠١٧ هـ  
١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ

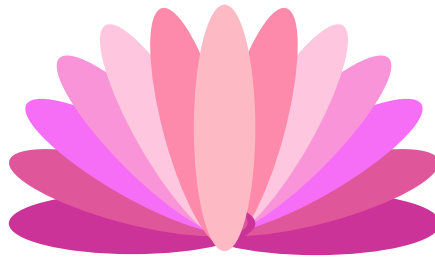
العام الدراسي

حقوق التأليف والنشر محفوظة  
لوزارة التربية في الجمهورية العربية السورية

حقوق الطبع والتوزيع محفوظة  
للمؤسسة العامة للطباعة

طُبِعَ أَوَّلَ مَرَّةٍ لِلْعَامِ الدَّرَاسِيِّ ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

إعداد		
أيشوع اسحق	ميكائيل الحمود	أ.د. عمران قوبا
وفاء حمشو	خالد رضوان	عيسى عثمان
عزيمات سعيد	خلدون الشماع	نضال تفاحة



# خطة توزيع منهج الرياضيات

يخصص أربع حصص أسبوعياً لكتاب الرياضيات الجزء الأول

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			الأشعة في الفراغ عموميات	الارتباط الخطي لثلاثة أشعة المعلم في الفراغ
تشرين أول	المسافة في الفراغ مركز الأبعاد المناسبة في الفراغ	أنشطة تمرينات ومسائل: لتتعلم البحث	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام الجداء السلمي في المستوي	الجداء السلمي في المستوي الجداء السلمي في الفراغ
تشرين ثاني	التعامد في الفراغ المعادلة الديكارتية لمستوى أنشطة	تمرينات ومسائل لتتعلم البحث وقدماً إلى الأمام	المستقيمات والمستويات في الفراغ المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد مناسبة	التمثيلات الوسيطة تقاطع مستقيمتين ومستويات
كانون أول	تقاطع ثلاثة مستويات أنشطة	مسائل: لتتعلم البحث مسائل: قدماً إلى الأمام	مجموعة الأعداد العقدية مرافق عدد عقدي	الشكل المثلثي لعدد عقدي طويلة عدد عقدي وزاويته
كانون ثاني	امتحان الفصل الأول والعطلة الانتصافية			الشكل الأسّي لعدد عقدي المعادلة التربيعية ذات الأمثال الحقيقية
شباط	أنشطة تمرينات ومسائل: لتتعلم البحث	مسائل: قدماً إلى الأمام تمثيل الأشعة بأعداد عقدية	استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع، الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية	أنشطة تمرينات ومسائل: لتتعلم البحث
آذار	مسائل: قدماً إلى الأمام المبدا الأساسي في العد	الترايب والتباديل التوافيق	منشور ذي الحدين أنشطة تمرينات ومسائل: لنتعلم البحث	مسائل قدماً إلى الأمام الاحتمالات المشروطة
نيسان	المتحولات العشوائية الاستقلال الاحتمالي لمتحوّلين المتحولات العشوائية الحدانية	أنشطة تمرينات ومسائل لتتعلم البحث	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام تمرينات ومسائل عامة
أيار	تمرينات ومسائل عامة	حل نماذج اختبارات		

يشتمل دليل المدرس لمادة الرياضيات **الجزء الثاني** للصف الثالث الثانوي العلمي على مخططات لتوزيع الحصص الدراسية ليكون عوناً للمدرس في بناء خطته الدراسية وتحليل محتوى للوحدة الأولى وجدول للتدريبات والتمارين والمسائل المتشابهة ليناقدش المدرس عدداً منها وما تبقى منها يحله الطالب بنفس الطريقة وتضمن الدليل أيضاً حلول التدريبات والأنشطة والتمارين والمسائل **لجميع الوحدات** .

فالتدريبات تهدف إلى تقويم الطالب وتمكنه من المعارف لذلك يجب التركيز على الواجب المنزلي وبإمكان المدرس اختيار عدد من التدريبات لتكون أمثلة تجري مناقشتها اثناء الحصة الدراسية وليتابع بعدها المدرس التركيز على أنشطة الوحدة لحاجة المتعلم اليها كونها مزودة بأسئلة وشروحات وتوضيحات كمدخل لحل تمارين ومسائل الوحدة. ويجب الاهتمام بمنهجية الكتاب ومراعاة تسلسل عرض الوحدات والدروس وابرز اهمية كل من المقدمة والانطلاقه النشطة وتكريساً للفهم وكذلك الأفكار الرئيسية لكل وحدة والتي جرى عرضها تحت اسم **أفكار يجب تمثلها و منعكسات يجب امتلاكها** و لكل منها أهميته.

- **المقدمة:** وهي مقدمة تحفيزية تهدف إلى تنمية اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات واحترام ما قدمه العلماء من إسهامات في ميادين العلوم المختلفة.
- **انطلاقاً نشطة:** تهدف إلى تعزيز المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلم مزودة بأسئلة وشروحات وتوضيحات كمدخل للوحدة والإضاءة على مفاهيمها.
- **أمثلة:** تتضمن مختلف الفقرات الموجودة في الدرس وهي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكون نماذج يجب اتباعها عند حل الأنشطة والتدريبات والمسائل.
- **تكريساً للفهم:** تطرح سؤالاً هاماً للمناقشة يتعلق بفكرة الدرس الأساسية في مادة التعلم والإجابة عنه بطرائق متعددة موضحة بالأمثلة المناسبة لتكريس الفهم عند المتعلم حيث تتم إعادة طرح أفكار الدرس بأساليب مختلفة.
- **أفكار يجب تمثلها:** وهي فقرة يجري فيها التنويه إلى قضايا ومفاهيم أساسية في الوحدة حيث تُعاد صياغتها بأسلوب مختصر ومبسط.

• **منعكساتٌ يجبُ امتلاكها:** وهي فقرةٌ تتضمن إرشاداتٍ للمتعلم على كيفية التفكير قبل البدء بالإجابة عن سؤال، وما هو المنعكس السريع الذي يجب أن يتبادر إلى ذهنه وكيفية استعمال القضايا والمفاهيم الأساسية في أمثلة توضيحية.

• **أخطاءٌ يجبُ تجنبُها:** حيث جرت الإشارة إلى بعض الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطلاب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطلاب في غير مكانها، أو بأسلوب منقوص.

• **أنشطة:** في نهاية كل وحدة مجموعة من التمرينات والتطبيقات الحياتية صيغت على شكل أنشطة تفاعلية.

• **لنتعلم البحث:** وهي فقرة تُدرِّب المتعلِّم على طرائق حلّ المشكلات وتشجّع التعلُّم الذاتي عن طريق تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي وجعله يطرح على نفسه الأسئلة الصحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثم صياغة هذه الحلول بلغة سليمة.

• **فُدماً إلى الأمام:** وهي تمارين ومسائل متنوعة ومتدرجة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتية تُتيح للمتعلم فرص تعلم كثيرة وتعزز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد لديه.

وهنا نريد التأكيد على أنّ تحقيق الأهداف المرجوة من دليل المدرس يتطلب من المدرس أن يختار الطريقة المناسبة والاسلوب الأفضل لبيؤدي دور المُيسر والموجه للعملية التعليمية، فيطرح التساؤلات المناسبة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقيّاً، ويوجه ممهداً الطريق لحل المسائل، ويصوغ الحلول صياغة لغوية سليمة على السبورة.

وفي النهاية، نريد أن نتوجه بالشكر إلى عدد من الزملاء الذين قدموا إلينا أشكالاً مختلفة من المساعدة على المسودات الأولى من الحلول .

وأخيراً نأمل من زملائنا الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويدنا بمقترحاتهم البناءة المتعلقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار.

.www.nccd.gov.sy

المُعَدّون

9	الأشعة في الفراغ	①
20	مخطط الدرس الأول	
21	مخطط الوحدة	
22	مخطط التدريبات وتمارينات ومسائل الوحدة الأولى	
23	حلول تدريب ص 18	
29	حلول تدريب ص 21	
39	تمرينات ومسائل لتتعلم البحث معاً	
42	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام	

53	المجداء السلمي في الفراغ	②
54	مخطط الدرس الأول نهاية تابع عند اللانهاية	
55	مخطط لدروس الوحدة	
56	تدرب ص 34	
58	مخطط للدرس الثاني	
59	تدرب ص 38	
62	تدرب ص 42	
67	تدرب ص 46	
70	تدرب ص 49	
73	تدرب ص 51	
78	تدرب ص 54	
80	تدرب ص 61	
84	أنشطة	
89	تمرينات ومسائل	
95	تمرينات ومسائل لتتعلم البحث معاً	
98	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام	

### ③ المستقيمات والمستويات في الفراغ

129	مخطط الدروس
131	تدرب ص 84
133	تدرب ص 89
137	تدرب ص 94
141	أنشطة
146	تمارينات ومسائل
156	تمارينات ومسائل لنتعلم البحث معاً
167	تمارينات ومسائل قدماً إلى الأمام
172	

### ④ الأعداد العقدية

199	1. مخطط الوحدة
201	مخطط تمارين ومسائل
202	تدرب ص 119
203	تدرب ص 123
207	تدرب ص 128
211	تدرب ص 232
215	أنشطة
218	تمارينات ومسائل لنتعلم البحث معاً
224	تمارينات ومسائل قدماً إلى الأمام
235	



275	تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة	⑤
276	1. مخطط دروس الوحدة	
278	تدرب ص 154	
281	تدرب ص 157-158	
286	تدرب ص 162	
289	تدرب ص 165	
أ شطة		
.....		
..... 295		
304	تمرينات ومسائل	
315	تمرينات ومسائل لنتعلم البحث معاً	
322	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام	

## التحليل التوافقي

⑥

359	مخطط دروس الوحدة
363	تدرب 186
366	تدرب 190
370	تدرب 194
373	تدرب 199
378	تدرب 203
386	تدرب 205
388	نشاط
396	تمرينات ومسائل
411	تمرينات ومسائل لنتعلم البحث معاً
416	تمرينات ومسائل قدماً إلى الأمام

## الاحتمالات

⑦

1. مخطط دروس وحدة التوابع الأصلية ..... 445
- تدرب 222 ..... 446
- تدرب 227 ..... 449
- تدرب ص 235 ..... 453
- نشاط 1: حساب مساحة سطح مستو ..... 464
- نشاط 2: حساب حجم مجسم ..... 466
- تمارينات ومسائل ..... 469
- تمارينات ومسائل لتتعلم البحث معاً ..... 473
- تمارينات ومسائل قدماً إلى الأمام ..... 475
- نماذج امتحانية شاملة ..... 205

# 1

## الأشعة في الفراغ

- 1 عموميات
- 2 الارتباط الخطي لثلاثة أشعة
- 3 المعلم في الفراغ
- 4 المسافة في الفراغ
- 5 مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- الارتباط الخطي لثلاثة أشعة.
- اختيار معلم مناسب في الفراغ واستعماله في حل مسائل هندسية مختلفة.
- حساب المسافة في الفراغ، وصيغتها في معلم متجانس.
- حساب مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ، الخاصة التجميعية، وتطبيقات ذلك في حل بعض مسائل الهندسية المختلفة.

## الدرس الأول : عموميات

## الحصة الأولى : تعريف الشعاع ، الارتباط الخطي

تعرف الشعاع في الفراغ ، الارتباط الخطي لشعاعين في الفراغ .	<b>أهداف الدرس</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• محاورة الطلاب بمفهوم الشعاع في الفراغ ، عناصره ، خواصه ( ص 13 ) .</li> <li>• تذكير بالعمليات على الأشعة في المستوي (الجمع والطرح وضرب شعاع بعدد) وتعميمها على الفراغ</li> <li>• تذكير بقواعد الحساب الشعاعي وتمديدها لتشمل الأشعة في الفراغ</li> <li>• تعريف الارتباط الخطي لشعاعين</li> <li>• مبرهنة 1</li> <li>• تعريف مكافئ لتعريف الارتباط الخطي لشعاعين، ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة والارتباط الخطي</li> <li>• مناقشة المثالين المحلولين ( من الكتاب ص 14 ، 15 ) .</li> <li>• تعريف المستقيم باستخدام الارتباط الخطي لشعاعين.</li> </ul>	<b>التعلم</b>
مفهوم الارتباط الخطي لشعاعين يفيد في إثبات توازي مستقيمين و إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.	<b>تكريساً للفهم</b>
تدرب صفحة 16.	<b>واجب منزلي</b>

## الحصة الثانية : مناقشة التدريبات ( رقم 1، 2 ص 16 )

## الحصة الثالثة: الدرس الثاني: الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

الخاصة المميزة لمستوي في الفراغ ، تعريف الارتباط الخطي لثلاثة أشعة .	<b>أهداف الدرس</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• عرض المبرهنة 3</li> <li>• مفهوم مجموعة النقاط المستوية</li> <li>• تعريف الارتباط الخطي لثلاثة أشعة في الفراغ</li> <li>• المبرهنة 4</li> <li>• مناقشة المثال المحلول ( ص 18 )</li> <li>• تدرب 2,1 صفحة 20</li> </ul>	<b>التعلم</b>
كيف نثبت أن مستقيماً يوازي مستويًا؟ كيف نثبت توازي مستويين؟	<b>تكريساً للفهم</b>
تتمة تدرب صفحة 20	<b>واجب منزلي</b>

## الحصة الرابعة حل تدرّب صفحة 20

### الحصة الخامسة : المعلم في الفراغ

معرفة : إحدائيات نقطة أو مركبات شعاع في معلم في الفراغ و الحساب باستعمال الإحدائيات	أهداف الدرس
<ul style="list-style-type: none"><li>مناقشة الطلاب بالمعلم في الفراغ ( الكيفي والمتعامد والمتجانس )</li><li>تعريف إحدائيات نقطة في الفراغ ، وأمثلة يحدد الطالب مواقع نقاط في معلم مفروض</li><li>تعريف مركبات الشعاع في معلم مفروض ( تعريف 3 ) ،</li><li>مناقشة الأمثلة المحلولة صفحة 22 و 23 .</li></ul>	التعلم
كيف نثبت الارتباط الخطي لشعاعين تحليلياً ؟ . تمرين ( تدرّب رقم 5 ) .	تكريساً للفهم
تتمة تدرّب صفحة 24	واجب منزلي

## الحصة السادسة : مناقشة تتمّة تدرّب صفحة 24

### الحصة السابعة : الدرس الرابع :المسافة في الفراغ

معرفة : المسافة بين نقطتين ( طول قطعة مستقيمة في الفراغ ) في معلم متجانس . معادلة كرة في الفضاء .	أهداف الدرس
<ul style="list-style-type: none"><li>تعريف المعلم المتجانس والتأكيد أنّ طول قطعة مستقيمة لا يطبق إلاّ في معلم متجانس . وشرح المبرهنة 6 .</li><li>تطبيق مباشر على المبرهنة 6 ( المثال المحلول ص 26 ) ، تدرّب ص 27 رقم 1 .</li><li>استنتاج معادلة الكرة في الفضاء ( مركزها المبدأ ، ثم مركزها نقطة A ) تدرّب ص 27 رقم 5 .</li></ul>	التعلم
كيف نجد طول قطعة مستقيمة في الفراغ ؟ والتأكيد على المعلم المتجانس .	تكريساً للفهم
تدرّب صفحة 27	واجب منزلي

### الحصّة الثامنة : مناقشة تدريب صفحة 27

#### الحصّة التاسعة: الدرس الخامس مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط في الفراغ ، تطبيقات : اثبات وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة ، تلاقي مستقيمت ، اثبات وقوع أربع نقط في مستو واحد .	<b>أهداف الدرس</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• مناقشة الطلاب بمفهوم مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين وثلاث نقط في المستوي وتعميم هذه الخاصة في الفراغ</li> <li>• تعريف مركز الابعاد المتناسبة لأربع نقط في الفراغ .</li> <li>•الخاصة المميزة (المبرهنة 7)</li> <li>•الخاصة التجميعية (المبرهنة 8)</li> </ul> <p>أمثلة محلولة (من الكتاب صفحة 29 ،30)، مركز ثقل رباعي الوجوه وتطبيق فقرة (فكر عليها)، اثبات وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة ، اثبات وقوع أربع نقط في مستو واحد</p>	<b>التعلم</b>
ماذا يفيد مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ ؟	<b>تكريساً للفهم</b>
تثبيت ما ورد من مفاهيم بقراءة فقرة أفكار يجب تمثيلها ، منعكسات يجب امتلاكها ، وأخطاء يجب تجنبها .	<b>أفكار يجب تمثيلها</b>
تدريب صفحة 31	<b>واجب منزلي</b>

### الحصّة العاشرة : حل تدريب صفحة 31

#### الحصّة الحادية عشرة : الأنشطة

معادلة الاسطوانة ، معادلة المخروط	<b>أهداف الدرس</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• تعريف الاسطوانة</li> <li>• معادلة الاسطوانة ، حل الاسئلة لواردة في النشاط</li> <li>• تعريف المخروط</li> <li>• معادلة المخروط حل الاسئلة الواردة في النشاط</li> </ul>	<b>التعلم</b>
تدريب صفحة 31	<b>واجب منزلي</b>

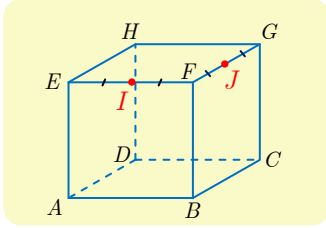
الحصص الأربع المتبقية لحل مسائل يختارها المدرس من مسائل الوحدة

# الأشعة في الفراغ

## تَدَرَّبْ صفحة 16

①  $ABCDEFGH$  مكعب.  $I$  منتصف  $[EF]$ ،  $J$  منتصف  $[FG]$ .

① في كلِّ من الحالات التالية، بيِّن إذا كانت النقطة  $M$  المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة



تتطبق أو لا تتطبق على أحد رؤوس المكعب. وعلِّل إجابتك.

$$\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} \quad \blacksquare 2 \quad \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{DH} \quad \blacksquare 1$$

$$\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{BF} \quad \blacksquare 4 \quad \vec{AM} = \vec{FE} + \vec{DG} \quad \blacksquare 3$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AG} + \vec{HB}) \quad \blacksquare 5$$

الحل

① نعم لأن  $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{DH} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$  ومنه  $M = F$ .

② نعم،  $M$  تتطبق على  $G$  لأن  $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FG} = \vec{AG}$

③ نعم،  $M$  تتطبق على  $E$  لأن  $\vec{AM} = \vec{FE} + \vec{DG} = \vec{FE} + \vec{AF} = \vec{AE}$

④ لا، لأن  $\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{BF}$  تقتضي أن  $\vec{GM} = \vec{BF} = \vec{CG}$ . إذن  $G$  منتصف  $[CM]$  فلا يمكن

أن تكون  $M$  رأساً من رؤوس المكعب.

⑤ نعم،  $M$  تتطبق على  $B$  لأن

$$2\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{HB} = \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{HA} + \vec{AB} = 2\vec{AB} + \vec{AH} + \vec{HA} = 2\vec{AB}$$

② في كلِّ من الحالات الآتية، حدِّد موقع النقطة  $N$  المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

$$\vec{AN} = \vec{AE} + \vec{BC} + \vec{HJ} \quad \blacksquare 2 \quad \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FJ} \quad \blacksquare 1$$

$$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{GH} + \vec{EI} \quad \blacksquare 3$$

الحل

①  $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FJ} = \vec{AF} + \vec{FJ} = \vec{AJ}$  ومنه  $N$  تتطبق على  $J$ .

②  $\vec{AN} = \vec{AE} + \vec{BC} + \vec{HJ} = \vec{AE} + \vec{AD} + \vec{HJ} = \vec{AH} + \vec{HJ} = \vec{AJ}$  ومنه  $N = J$

③  $\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{GH} + \vec{EI} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{EI} = \vec{AI}$  ومنه  $N = I$



③ في كلِّ من الحالات الآتية، عبِّر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاعٍ واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

$$\begin{aligned} \text{1. } \vec{AJ} + \vec{BA} & \quad \text{2. } \vec{BF} + \vec{EC} & \text{3. } \vec{AE} + \vec{AF} & \text{4. } \frac{1}{2}\vec{EG} + \vec{JF} \end{aligned}$$

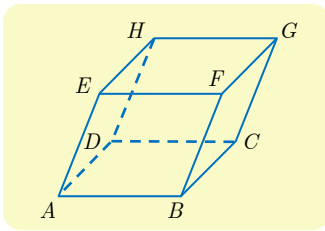
الحل

$$\text{1. } \vec{AJ} + \vec{BA} = \vec{AB} + \vec{BJ} + \vec{BA} = \vec{BJ}$$

$$\text{2. } \vec{BF} + \vec{EC} = \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AC}$$

$$\text{3. } \vec{AE} + \vec{AF} = 2\vec{AI}$$

$$\text{4. } \frac{1}{2}\vec{EG} + \vec{JF} = \frac{1}{2}\vec{EG} + \frac{1}{2}\vec{GF} = \frac{1}{2}\vec{EF}$$



② متوازي سطوح.  $ABCDEFGH$

① أثبت صحة المساواة الشعاعية، في كل من الحالات الآتية:

$$\text{1. } \vec{EA} + \vec{EF} + \vec{BE} = \vec{0} \quad \text{2. } \vec{ED} + \vec{CF} = \vec{0}$$

$$\text{3. } \vec{CD} + \vec{CG} + \vec{EB} = \vec{0} \quad \text{4. } \vec{FE} + \vec{FB} + \vec{FG} = \vec{FD}$$

الحل

$$\text{1. } \vec{EA} + \vec{EF} + \vec{BE} = \vec{EB} + \vec{BE} = \vec{0}$$

$$\text{2. } \vec{ED} + \vec{CF} = \vec{EF} + \vec{FC} + \vec{CD} + \vec{CF} = \vec{EF} + \vec{CD} = \vec{0} \quad \text{وبما أن } \vec{ED} + \vec{CF} = \vec{0}$$

$$\text{و } \vec{FC} + \vec{CF} = \vec{0} \quad \text{نجد } \vec{ED} + \vec{CF} = \vec{0}$$

$$\text{3. } \vec{CD} + \vec{CG} + \vec{EB} = \vec{CH} + \vec{EB} = \vec{0} \quad \text{وبطريقة مماثلة لما سبق نجد } \vec{CH} + \vec{EB} = \vec{0}$$

$$\text{4. } \text{لدينا } \vec{FE} + \vec{FB} = \vec{FA} \quad \text{كما أن } \vec{FG} = \vec{AD} \quad \text{واستناداً إلى علاقة شال نجد}$$

$$\vec{FE} + \vec{FB} + \vec{FG} = \vec{FA} + \vec{AD} = \vec{FD}$$

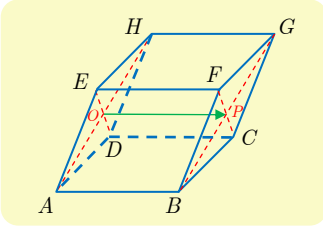
② وضِّعْ النقاط  $P$  و  $Q$  و  $R$  بحيث يكون:

$$\text{1. } \vec{AP} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

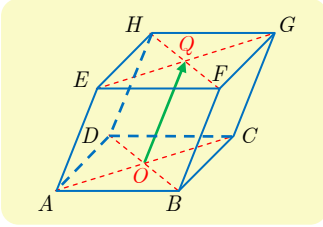
$$\text{2. } \vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$$

$$\text{3. } \vec{CR} = \frac{1}{2}\vec{AE} - \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}$$

### الحل



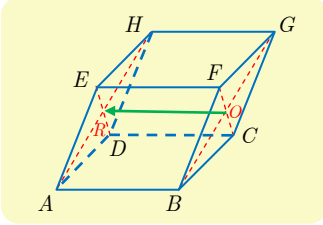
1. لتكن  $O$  مركز الوجه  $ADHE$ ، عندئذ  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$  ومنه  $P$  هي صورة  $O$  وفق انسحاب شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  أي  $P$  هي مركز الوجه  $ACGF$ .



2. لتكن  $O$  مركز الوجه  $ABCD$ ، عندئذ  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AE}$  ومنه  $Q$  هي صورة  $O$  وفق انسحاب شعاعه  $\overrightarrow{AE}$  أي  $Q$  هي مركز الوجه  $EFGH$ .

3. لدينا

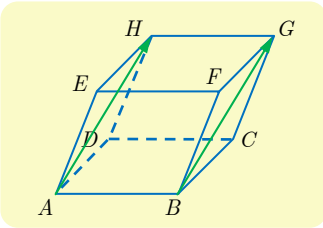
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CO}\end{aligned}$$



لتكن  $O$  مركز الوجه  $BCGF$ ، عندئذ تكون  $R$  صورة  $O$  وفق انسحاب شعاعه  $\overrightarrow{CD}$  أي  $R$  هي مركز الوجه  $ADHE$ .

3 عيّن شعاعاً يساوي  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$  وأثبت أنّ هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع  $\overrightarrow{AH}$ .

### الحل



استناداً إلى علاقة شال نجد  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$  ولأن  $BCGF$  متوازي الأضلاع وجدنا

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$$

أي  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$  يرتبط خطياً بالشعاع  $\overrightarrow{AH}$ .

4 أوجد شعاعاً يساوي  $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$  وأثبت أنّ هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع  $\overrightarrow{DF}$ .

### الحل

بما أن الشكل  $FBCG$  متوازي أضلاع فإن  $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC}$  وبما أنّ كل وجه من أوجه متوازي السطوح هو متوازي أضلاع فإنّ  $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$  ومنه

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{DF}$$

أي  $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$  يرتبط خطياً بالشعاع  $\overrightarrow{DF}$ .

## تَدْرِبْ صفحة 20

①  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. أشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{BC}$  مرتبطة خطياً؟

الحل

نعم لأنها تقع في مستوٍ واحد، كما إن  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$  وضوحاً.

②  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ.  $E$  نقطة تحقق  $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ ، و  $F$  نقطة تحقق

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}. \text{ أتقعُّ النقاط } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } E \text{ و } F \text{ في مستوٍ واحد؟}$$

الحل

من العلاقة  $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$  نجد أن النقاط  $B$  و  $C$  و  $E$  على استقامة واحدة ومنه  $E$  تقع في المستوي

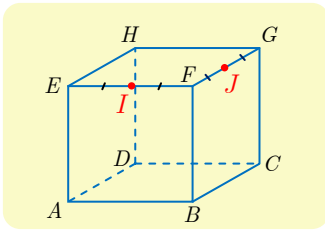
$(ABC)$ ، و من العلاقة  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$  نجد أن النقاط  $A$  و  $E$  و  $F$  على استقامة واحدة ومنه  $F$

تقع في المستوي  $(ABE)$  أي المستوي  $(ABC)$  و النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $E$  و  $F$  في مستوٍ واحد.

③  $ABCDEF GH$  مكعب.  $I$  منتصف  $[EF]$  و  $J$  منتصف  $[FG]$ .

① أتتتمي النقطة  $J$  إلى المستوي  $(ABI)$ ؟

② أتقعُّ الأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AI}$  و  $\overrightarrow{AJ}$  في مستوٍ واحد؟



الحل

① لا،  $J$  لا تقع في الوجه  $(ABFE)$  وهو نفسه المستوي  $(ABI)$ .

② لا، وإلا انتمت  $J$  إلى المستوي  $(ABI)$ .

④  $ABCD$  رباعي وجوه. و  $M$  هي النقطة المحققة للعلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

عبّر عن  $\overrightarrow{AM}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$ . واستنتج أن  $M$  تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

الحل

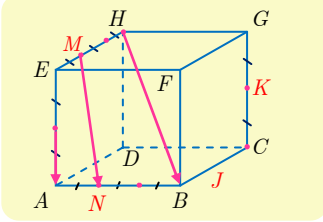
بالاستفادة من علاقة شال لدينا  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن  $M$  تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

⑤  $ABCEFGH$  مكعب. فيه  $M$  نقطة تُحَقَّق  $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ، و  $N$  نقطة تُحَقَّق  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .

① أثبت أن  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ .

② أتكون الأشعة  $\overrightarrow{EA}$  و  $\overrightarrow{MN}$  و  $\overrightarrow{HB}$  مرتبطة خطياً؟

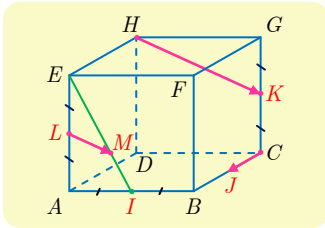


الحل

① بالاستناد إلى علاقة شال نجد

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA}\end{aligned}$$

②  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{EA}$  إذن  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$  فالأشعة  $\overrightarrow{EA}$  و  $\overrightarrow{MN}$  و  $\overrightarrow{HB}$  مرتبطة خطياً.



⑥  $ABCEFGH$  مكعب.  $L$  و  $K$  و  $J$  و  $I$  هي بالترتيب منتصفات

$[AB]$  و  $[BC]$  و  $[CG]$  و  $[AE]$ . ولتكن  $M$  النقطة المحققة

$$3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$$

① لماذا  $M$  هي مركز ثقل المثلث  $AEB$ ؟

② أتكون الأشعة  $\overrightarrow{LM}$  و  $\overrightarrow{CJ}$  و  $\overrightarrow{HK}$  مرتبطة خطياً؟

الحل

①  $[EI]$  متوسط في المثلث  $EAB$ ، والعلاقة  $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$  تنص على أن النقط  $M$  تقسم هذا

المتوسط بنسبة 1 : 2 إذن  $M$  هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث  $EAB$ ، أو مركز ثقله.

②  $[BL]$  متوسط آخر في المثلث  $EAB$ . إذن

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK}$$

فالأشعة  $\overrightarrow{LM}$  و  $\overrightarrow{CJ}$  و  $\overrightarrow{HK}$  مرتبطة خطياً لأن الشعاعين  $\overrightarrow{LM}$  و  $\overrightarrow{HK}$  مرتبطان خطياً، أو

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} + 0\overrightarrow{CJ}$$

## تَدْرِبْ صَفِيحَة 24

① نتأمل النقاط  $A(3,5,2)$  و  $B(2,-1,3)$  و  $C(0,-2,2)$  و  $D(-2,5,1)$  و  $E(3,9,2)$  و  $F(8,13,3)$ ، في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  للفراغ.

- ① احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة  $[AB]$  و  $[CD]$  و  $[EF]$ .
- ② احسب مركبات الأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  و  $\overrightarrow{EF}$ .
- ③ عيّن إحداثيات النقطة  $K$  بحيث يكون الرباعي  $ABCK$  متوازي أضلاع.
- ④ جد مركبات كل من الشعاعين :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} \quad \text{و} \quad \vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$

الجل

① منتصف  $[AB]$  هو  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

منتصف  $[CD]$  هو  $\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right) = \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

منتصف  $[EF]$  هو  $\left(\frac{x_E + x_F}{2}, \frac{y_E + y_F}{2}, \frac{z_E + z_F}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 11, \frac{5}{2}\right)$

② وكذلك

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

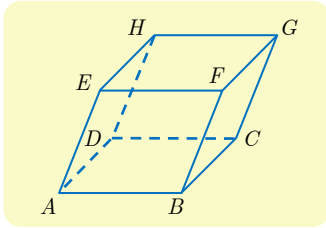
③ يكون الرباعي  $ABCK$  متوازي أضلاع إذا فقط إذا كان  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$  فإذا وضعنا  $K(x, y, z)$  كتبت المساواة  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$  بالشكل  $(-1, -6, 1) = (-x, -2 - y, 2 - z)$  ومنه  $K(1, 4, 1)$ .

④

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}$$

② في معلمٍ  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  للفراغ. نعطي إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح  $ABCDEFGH$



المرسوم جانباً، وهي

.  $E(3, -1, 3)$  و  $C(-3, 2, 0)$  و  $B(1, 3, -1)$  و  $A(2, 1, -1)$

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

الحل

• لما كان  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC}$  استنتجنا أن

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي  $D(-2, 0, 0)$

• ولما كانت النقاط  $F$  و  $G$  و  $H$  تنتج بالترتيب من النقاط  $B$  و  $C$  و  $D$  بإجراء انسحاب شعاعه

استنتجنا أن  $\vec{AE} = (1, -2, 4)$

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

أي  $H(-1, -2, 4)$  و  $G(-2, 0, 4)$  و  $F(2, 1, 3)$

③ لدينا، في معلمٍ للفراغ، النقاط  $A(3, 0, -1)$  و  $B(-2, 3, 2)$  و  $C(1, 2, -2)$

① جد إحداثيات النقطة  $I$  منتصف  $[AB]$ .

② جد إحداثيات النقطة  $D$  نظيرة  $I$  بالنسبة إلى  $C$ .

③ جد إحداثيات النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة  $\vec{BM} = \vec{AB} + 3\vec{AC}$

④ جد إحداثيات النقطة  $N$  التي تحقق العلاقة  $\vec{NA} = 2\vec{NC}$

الحل

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ①$$

② نظيرة  $I$  بالنسبة إلى  $C$ ، أي  $\vec{IC} = \vec{CD}$  ومنه

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{IC} = 2\vec{OC} - \vec{OI}$$

وهي تكتب باستعمال المركبات كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

أي  $D(1.5, 2.5, -4.5)$ .

③ من  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$  وباستعمال علاقة شال نستنتج أن  $\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ .

إذن

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي  $M(-13, 12, 2)$

④ أي  $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$  أو  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{ON})$  ومنه  $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$ .

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

إذن  $N(-1, 4, -3)$

④ لدينا النقطتان  $A(2, 3, -2)$  و  $B(5, -1, 0)$ . جُدْ، **إن أمكن**، في كل حالة، إحداثيات النقطة  $M$

المحققة للعلاقة المفروضة.

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} & \text{②} \\ \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} & \text{①} \\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} & \text{④} \\ 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} & \text{③} \end{array}$$

الحل

①  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$  تكافئ  $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$  ومنه

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$$

أي  $M(-4, 11, -6)$ .

②  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$  تكافئ  $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$  وهذا تناقض، إذن لا يوجد  $M$  تحقق هذه المساواة.

③  $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  تكافئ،  $-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$  أو  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ . فهي المعادلة ①

ذاتها، وحلها  $M(-4, 11, -6)$ .

④ لدينا  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$  فالمعادلة تكافئ  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$  أو  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ، ولأن  $A \neq B$  كانت

مجموعة الحلول خالية.

⑤ أيمكن تعيين  $a$  و  $b$  لتقع النقاط  $A(2,3,0)$  و  $B(3,2,1)$  و  $M(a,b,2)$  على استقامة واحدة؟

**الجل**

حتى تقع النقاط  $M$  و  $B$  و  $A$  على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BM}$  مرتبطين خطياً، أي أن يوجد عدد حقيقي  $k$  غير معدوم يحقق  $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{AB}$ ، تكافئ هذه المساواة

$$(a - 3, b - 2, 1) = k(1, -1, 1)$$

ومنه  $k = 1$  و  $b = 1$  و  $a = 4$ .

⑥ أيمكن تعيين  $a$  ليكون الشعاعان  $\vec{u}(2, a, 5)$  و  $\vec{v}(1, -2, a)$  مرتبطين خطياً؟

**الجل**

يكون الشعاعان مرتبطين خطياً إذا وجد عدد حقيقي  $k$  يحقق  $\vec{v} = k\vec{u}$  أي  $(1, -2, \alpha) = (2k, ka, 5k)$  ومنه نحصل على جملة المعادلات ①  $2k = 1$  و ②  $-2 = ka$  و ③  $a = 5k$ ، من ① نجد  $k = \frac{1}{2}$ ، نعوض في ② نجد  $a = -4$  وهذه النتائج لا تحقق ③ إذن لا يمكن تعيين  $a$  ليكون الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطين خطياً.

⑦ في كل من الحالات الآتية، بين إذا كانت النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تقع على استقامة واحدة.

①  $C(2, 0, -3)$ ،  $B(0, 2, 4)$ ،  $A(3, -1, 2)$

②  $C(0, -1, 7)$ ،  $B(-2, 0, 5)$ ،  $A(-4, 1, 3)$

③  $C(1, -1, -3)$ ،  $B(1, -1, 4)$ ،  $A(1, -1, 0)$

**الجل**

حتى تكون النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  مرتبطين خطياً.

①  $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 2)$  و  $\overrightarrow{BC} = (2, -2, -7)$  المركبات غير متناسبة إذن لا تقع النقاط على استقامة واحدة.

②  $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 2)$ ،  $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 2)$ ، نلاحظ أن  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$  إذن  $B$  منتصف  $[AC]$  والنقاط واقعة على استقامة واحدة.

③  $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 4)$ ،  $\overrightarrow{BC} = (0, 0, -7)$ ، نلاحظ أن  $\overrightarrow{BC} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$  والنقاط واقعة على استقامة واحدة.



## تَدْرِبْ صفحة 27

① احسب نظيم  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  في كل من الحالات الآتية:

①  $\vec{u}(2, -2, 3)$  و  $\vec{v}(4, -4, -2)$  و  $\vec{w}(4, 1, -2)$ .

②  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  و  $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$  و  $\vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$ .

الجل

①

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

②

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 0 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{6}$$

② فيما يأتي، بيّن هل المثلث  $ABC$  قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

① في حالة  $A(1, 3, -1)$  و  $B(3, 6, -2)$  و  $C(0, 4, 0)$ .

② في حالة  $A(1, 3, -2)$  و  $B(2, -1, 0)$  و  $C(6, -3, -1)$ .

الجل

①  $AB = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$  و  $AC = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$  و  $BC = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$

والمثلث قائم في  $A$  حسب عكس فيثاغورث وغير متساوي الساقين وغير متساوي الأضلاع لأن أضلاعه مختلفة في الطول.

② لدينا  $AB = \sqrt{21}$  و  $AC = \sqrt{62}$  و  $BC = \sqrt{21}$ . والمثلث غير قائم لأنه لا يحقق عكس

فيثاغورث ولكنه متساوي الساقين حيث  $AB = BC$  وغير متساوي الأضلاع.

③ لدينا النقطتان  $A(5, 2, -1)$  و  $B(3, 0, 1)$ . بيّن أيّ النقاط  $C$  أو  $D$  أو  $E$  تنتمي إلى المستوي

المحوري للقطعة  $[AB]$ ، في حالة  $C(-2, 5, -2)$  و  $D(1, 1, -3)$  و  $E(3, 2, 1)$ .

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها.



### الجل

لدينا  $AC = BC = \sqrt{59}$  أي  $C$  متساوية البعد عن طرفي القطعة  $[AB]$  فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$ .  
وكذلك  $AD = BD = \sqrt{21}$  أي  $D$  متساوية البعد عن طرفي القطعة  $[AB]$  فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$ .  
وأخيراً  $AE = \sqrt{8}$  و  $BE = 2$  إذن  $AE \neq BE$ ، والنقطة  $E$  لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$ .

④ نتأمل النقاط  $A(1,1,\sqrt{2})$  و  $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$  و  $C$  نظيرة  $A$  بالنسبة إلى المبدأ  $O$ . أثبت أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم ومتساوي الساقين.

### الجل

نلاحظ أن  $OA = OB = 2$  وأن

$$AB^2 = (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 + 2 = 8 = OA^2 + OB^2$$

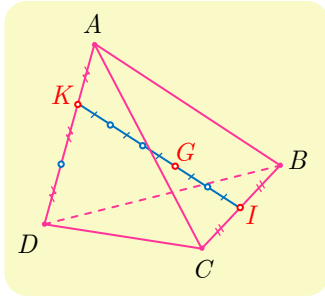
إذن  $OAB$  مثلث قائم في  $O$  ومتساوي الساقين. ولأن  $C$  نظيرة  $A$  بالنسبة إلى  $O$  استنتجنا أن  $B$  تقع على محور  $[AC]$  فالمثلث  $ABC$  مثلث متساوي الساقين رأسه  $B$ . وهو قائم لأن  $OA = OB = OC$ . (المتوسط يساوي نصف طول الضلع المقابل) إذن  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين.

⑤ نتأمل النقاط  $A(2,3,-1)$  و  $B(2,8,-1)$  و  $C(7,3,-1)$  و  $D(1,-3,3)$  و  $E(5,3,3)$ . أثبت أن  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  تقع على كرة واحدة مركزها  $A$ .

### الجل

نحسب الأطوال  $AB$  و  $AC$  و  $AD$  و  $AE$ ، فنجدها جميعاً تساوي 5. فهي تقع على الكرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها 5.

## تَدْرِبْ صفحة 31



① بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور، عَيِّن الأعداد

الأربعة  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  ليتحقق ما يأتي :

① مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, a)$  و  $(D, d)$ .

② مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, b)$  و  $(C, c)$ .

③ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقَّلة

$(A, a)$  و  $(B, b)$  و  $(C, c)$  و  $(D, d)$ .

الحل

① من الرسم نجد أن  $\vec{KD} + 2\vec{KA} = \vec{0}$  إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 2)$  و  $(D, 1)$  ومنه نستنتج أن  $a = 2d \neq 0$ .

②  $I$  منتصف  $[BC]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1)$  و  $(C, 1)$ . إذن  $c = b \neq 0$ .

③  $G$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I, 3)$  و  $(K, 2)$  إذن  $\frac{a+d}{2} = \frac{c+b}{3}$  ومنه  $9d = 4b$  فإذا اخترنا  $d = 4$  مثلاً كي لا نحصل على أوزان كسرية، وجدنا  $(a, b, c, d) = (8, 9, 9, 4)$ ، وبالطبع أي حل آخر ينتج عن ضرب جميع هذه الأوزان بالعدد غير المعدوم نفسه هو حلٌّ مقبول.

② عين مركز ثقل المثلث  $ABC$ ، في حالة  $A(-4, -1, 2)$  و  $B(-2, 1, 0)$  و  $C(6, 3, -5)$ .

الحل

مركز ثقل المثلث  $ABC$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, 1)$  ومنه

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -1$$

ومنه  $G(0, 1, -1)$ .

③ لدينا ثلاث نقاط في الفراغ  $A$  و  $B$  و  $C$ .

① أثبت وجود نقطة وحيدة  $M$  تُحقِّق  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$ .

② ما القول عن  $M$  عندما تكون  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة؟

③ ما القول عن الرباعي  $ACBM$  عندما لا تقع  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة؟

- ① الشرط  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$  يكافئ  $\vec{AM} = \vec{CB}$ . إذن  $M$  هي صورة  $A$  وفق الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{CB}$ .
- ② إذا انتمت  $A$  إلى المستقيم  $(BC)$  انتمت صورتها  $M$  وفق الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{BC}$  إلى المستقيم  $(BC)$  نفسه، ومن ثم وقعت النقاط  $M$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة.
- ③ نستنتج من العلاقة  $\vec{AM} = \vec{CB}$  عندما لا تقع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة أنّ  $ACBM$  متوازي الأضلاع.

- ④ ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه و  $k$  عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1. لتكن  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  النقاط المعرفة بالعلاقات :  $\vec{AI} = k\vec{AB}$  و  $\vec{AJ} = k\vec{AD}$  و  $\vec{CK} = k\vec{CD}$  و  $\vec{CL} = k\vec{CB}$ .
- ① أثبت أنّ  $\vec{IJ} = k\vec{BD} = \vec{LK}$  واستنتج أنّ النقاط الأربع  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  تقع في مستوٍ واحد.
- ② ما طبيعة الشكل الرباعي  $IJKL$ ؟

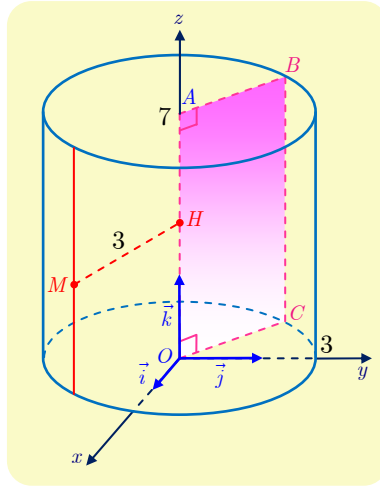
- ①  $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -k\vec{AB} + k\vec{AD} = k(\vec{AD} - \vec{AB}) = k\vec{BD} \dots ①$
- $\vec{LK} = \vec{LC} + \vec{CK} = -k\vec{CB} + k\vec{CD} = k(\vec{CD} - \vec{CB}) = k\vec{BD} \dots ②$
- من ① و ② نجد  $\vec{IJ} = k\vec{BD} = \vec{LK}$  أي  $\vec{IJ} = \vec{LK}$  أي إن المستقيم  $(IJ)$  يوازي  $(LK)$  النقاط الأربع  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  تقع في مستوٍ واحد.
- ② بما أن  $\vec{IJ} = \vec{LK}$  فإن الشكل  $IJKL$  متوازي أضلاع.

## أنشطة

### نشاط 1 معادلة أسطوانة ومعادلة مخروط

#### 1 معادلة أسطوانة

لتكن  $A$  النقطة التي إحداثياتها  $(0,0,7)$  في معلم متجانس معطى في الفراغ  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نتأمل الأسطوانة المولدة من دوران الضلع  $[BC]$  من المستطيل  $OABC$  حول المستقيم  $(OA)$  حيث  $AB = 3$ . ولتكن  $M$  نقطة متحولة من الأسطوانة، و  $H$  مسقطها القائم على القطعة المستقيمة  $[OA]$ .



① نفترض أنّ  $M(x,y,z)$ . ما إحداثيات النقطة  $H$ ؟ أثبت أنّ إحداثيات  $M$  تُحقّق العلاقتين:

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ و } 0 \leq z \leq 7$$

② بالعكس، إذا كانت  $M(x,y,z)$  نقطة من الفراغ تُحقّق إحداثياتها  $x^2 + y^2 = 9$  و  $0 \leq z \leq 7$ .

فأثبت أنّ  $MH = 3$ ، واستنتج أنّ  $M$  تقع على الأسطوانة.

**النتيجة:** معادلة هذه الأسطوانة هي  $x^2 + y^2 = 9$  و  $0 \leq z \leq 7$ .

③ أيّ النقاط الآتية تقع على الأسطوانة  $D(3,0,3)$  و  $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$  و  $F(1,3,1)$ ؟

④  $a$ . جد معادلة للأسطوانة التي محورها  $(O, \vec{j})$  وقاعدتها الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 2.

$b$ . أعد السؤال ④  $a$ . في حالة مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة  $Q(0,8,0)$ .

⑤ جد معادلة الأسطوانة التي محورها  $(O, \vec{i})$  ومركز قاعدتها  $T(3,0,0)$  ونصف قطرها  $\sqrt{6}$ .

⑥ صِفْ مجموعة النقاط  $M(x,y,z)$  التي تحققُ إحداثياتها العلاقات

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ و } 1 \leq z \leq 4$$

① إن احداثيات  $H$  هي  $(0,0,z)$  لأنها نقطة من المحور  $OZ$ . عندما تتحول  $M$  على سطح الأسطوانة فإن المسافة  $MH$  تبقى ثابتة وقيمتها  $(3)$ ، وهذا يكافئ  $\sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 3$  أو  $x^2 + y^2 = 9$  وبما أن  $M$  نقطة من الأسطوانة المولدة بالضلع  $[BC]$  فإن  $H$  نقطة من المسقط القائم  $\perp [BC]$  على  $OZ$  أي  $H$  نقطة من  $[OA]$  وبالتالي  $z_O \leq z \leq z_A$  وهذا يكافئ أن  $0 \leq z \leq 7$ .

② لتكن النقطة  $M(x,y,z)$  من الفراغ تحقق  $x^2 + y^2 = 9$  و  $0 \leq z \leq 7$ . إن مسقط  $M$  على  $OZ$  هو  $H(0,0,z)$  ويحقق  $MH^2 = x^2 + y^2 + 0 = 9$  أي  $MH = 3$  وبالتالي فإن  $M$  تقع الضلع  $[BC]$  من المستطيل  $OABC$  حيث  $B = (x,y,7)$  و  $C = (x,y,0)$ ، في أحد أوضاعه عندما يدور حول  $(OA)$ . إذن  $M$  نقطة من الأسطوانة، وأن معادلة الأسطوانة هي  $x^2 + y^2 = 9$  و  $0 \leq z \leq 7$ .

③ النقطة  $D$  تحقق  $x_D^2 + y_D^2 = 9 + 0 = 9$  وتحقق  $0 \leq z_D = 3 \leq 7$  ومنه فإن  $D$  تقع على الأسطوانة ( لأنها تحقق معادلة الأسطوانة ).

النقطة  $E$  تحقق  $x_E^2 + y_E^2 = 6 + 3 = 9$  كما إن  $0 \leq z_E = 4 \leq 7$  وبالتالي  $E$  تقع على الأسطوانة .

النقطة  $F$  لا تقع على الأسطوانة لأن  $x_F^2 + y_F^2 \neq 9$ .

④  $a$ . معادلة الأسطوانة هي  $x^2 + z^2 = 4$ .

$b$ . معادلة الأسطوانة هي  $x^2 + z^2 = 4$ .

⑤ معادلة الأسطوانة هي  $y^2 + z^2 = 6$ .

⑥ مجموعة النقاط  $M$  هي أسطوانة محورها  $OZ$  ونصف قطرها  $(5)$  ومركزي قاعدتيها هما  $O(0,0,1)$  و  $O'(0,0,4)$ .

## ② معادلة مخروط

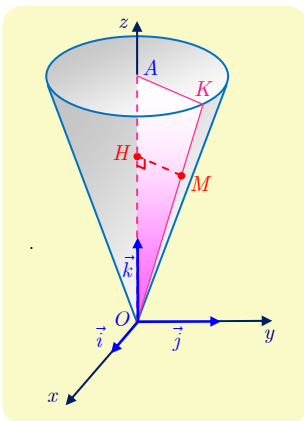
لتكن  $A$  النقطة التي إحداثياتها  $(0,0,5)$  في معلم متجانس معطى في الفراغ  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . لننأمل المخروط المولد من دوران الضلع  $[OK]$  من المثلث  $OAK$  حول  $(OA)$  مع  $AK = 2$ .

① لتكن  $M$  نقطة من المخروط، و  $H$  مسقطها القائم على القطعة  $[OA]$ .

$a$ . أثبت أن  $\frac{MH}{OH} = \frac{2}{5}$ ، ثم  $MH^2 = \frac{4}{25}OH^2$ .

$b$ . اكتب المساواة السابقة بدلالة إحداثيات  $M$  ولتكن  $(x,y,z)$ . وأثبت

أنه إذا كانت  $M(x,y,z)$  نقطة من المخروط، كان  $x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$  و  $0 \leq z \leq 5$ .



② بالعكس، لتكن  $M(x, y, z)$  نقطةً من الفراغ تُحقق إحداثياتها العلاقات

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0 \text{ و } 0 \leq z \leq 5$$

أثبت أنه إذا كان  $z \neq 0$ ، كان  $\frac{MH}{OH} = \frac{2}{5}$ . واستنتج أن  $M$  تقع على المخروط. لا تنسَ حالة  $z = 0$ .

**النتيجة :** معادلة هذا المخروط هي  $x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$  مع  $0 \leq z \leq 5$ .

③ عيّن من بين النقاط الآتية، تلك التي تقع على المخروط، مبرراً إجابتك :

$$T(2, 2\sqrt{3}, 10) \text{ و } S(1, 1, 3) \text{ و } R(-2, 1, 5) \text{ و } Q(2, 0, 5)$$

④ اكتب معادلةً للمخروط الذي رأسه  $O$  ومحوره  $(O, \vec{i})$  وقاعدته الدائرة التي مركزها  $B(4, 0, 0)$  ونصف قطرها 3.

### الجل

① a. المثلثان  $OAK$  و  $OHM$  متشابهان وبالتالي فإن أضلاعهما متناسبة ومنه  $\frac{MH}{AK} = \frac{OH}{OA}$  وهذا

$$\text{يكافئ } \frac{MH}{2} = \frac{OH}{5} \text{ وتكافئ } \frac{MH}{OH} = \frac{2}{5} \text{ وبالتالي } MH = \frac{2}{5}OH \text{ ومن ثم } MH^2 = \frac{4}{25}OH^2$$

b. إذا فرضنا  $M(x, y, z)$  فإن  $H(0, 0, z)$  ومنه  $OH^2 = z^2$ ،  $MH^2 = x^2 + y^2$  وبالتالي فالعلاقة

$$MH^2 = \frac{4}{25}OH^2 \text{ تكافئ } x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2 \text{ وتكافئ } x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0 \text{ مع } 0 \leq z \leq 5$$

② لدينا  $M(x, y, z)$  و  $H(0, 0, z)$  و  $O(0, 0, 0)$  ومنه  $MH = \sqrt{x^2 + y^2}$  و  $OH = z$  (لأن

$$z \geq 0) \text{ وبالتالي عندما } 0 < z < 5 \text{ فإن } \frac{MH}{OH} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\sqrt{\frac{4}{25}z^2}}{z} = \frac{\frac{2}{5}z}{z} = \frac{2}{5} \text{ وبالتالي فإن}$$

$\frac{MH}{OH} = \frac{AK}{OA}$  أو  $\frac{MH}{AK} = \frac{OH}{OA}$  وبالتالي فلا بد أن النقطة  $M$  تقع على الضلع  $[OK]$  وهذا يعني أنها تقع على المخروط.

وفي حالة  $z = 0$  فإن  $H$  تنطبق على  $O$  وهذا بدوره يعني انطباق  $M$  على  $O$  و  $O$  هي نقطة من

المخروط وضوحاً. نستنتج أن معادلة المخروط هي  $x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$  مع  $0 \leq z \leq 5$

③ نلاحظ أن  $0 \leq z_Q = 5 \leq 5$  و  $x_Q^2 + y_Q^2 - \frac{4}{25}z_Q^2 = 0$  ومنه  $Q$  نقطة من المخروط، بينما  $R$  و  $S$  و  $T$  لا تقع على المخروط.

④ معادلة المخروط هي  $y^2 + z^2 - \frac{9}{16}x^2 = 0$  مع  $0 \leq x \leq 4$ .

## تمارين ومسابقات

1  $ABCD$  رباعي وجوه. فيه  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[CD]$  و  $O$  منتصف  $[IJ]$ .

① املاً الفراغ :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \dots + \overrightarrow{CD}$  . واستنتج أن

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

② بسّط كلاً من  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$  و  $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$  . استنتج أن

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

③ لماذا  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$  و  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$  ؟ استنتج أن

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

④ لتكن  $K$  منتصف  $[AD]$  ، و  $L$  منتصف  $[BC]$  . أثبت أن  $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$  و  $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$  .

استنتج أن  $ILJK$  متوازي أضلاع.

الحل

① استناداً إلى علاقة شال نجد  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$  ، وبتطبيقها مرة ثانية نجد  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$  ومنه  $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$

② إن  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{BD}$  وجمع العلاقتين طرفاً لطرف نجد:

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

فينتج  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

③ هذه قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة ومنه نستنتج

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$$

④  $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$  وبالمثل نجد  $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$  . إذن  $\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{IK}$

والرباعي  $ILJK$  متوازي الأضلاع.

2  $ABCD$  رباعي وجوه. وضّع على شكل النقاط الآتية:

① مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,2)$  .

② مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(C,2)$  و  $(D,1)$  .

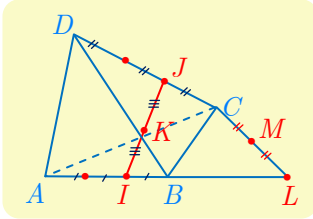
③ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(C,2)$  و  $(D,1)$  .

④ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  .

⑤ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  و  $(C,-1)$  .

⑥ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  و  $(C,-1)$  و  $(D,1)$  .



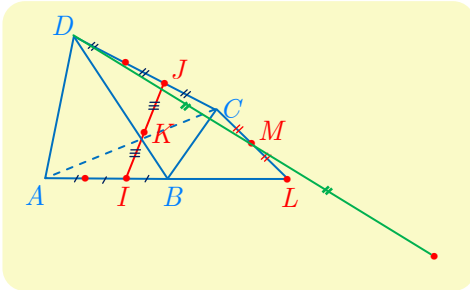


① بما أن  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,2)$  فيتحقق  
 $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$  ومنه  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .

② بما أن  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C,2)$  و  $(D,1)$  فيتحقق  
 $\overrightarrow{JD} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$  ومنه  $\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ .

③ بما أن  $K$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(C,2)$  و  $(D,1)$  فينتج أن  $K$   
 مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I,3)$  و  $(J,3)$  (حسب الخاصة التجميعية) ومنه  $K$  منتصف  $[IJ]$ .

④ بما أن  $L$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  فيتحقق  $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \vec{0}$  ومنه  
 $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$



⑤ بما أن  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  و  $(C,-1)$  فينتج أن  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  
 $(C,-1)$  و  $(L,-1)$  (حسب الخاصة التجميعية) ومنه  $M$   
 منتصف  $[CL]$ .

⑥ بما أن  $N$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,-2)$  و  $(C,-1)$  و  $(D,1)$  فينتج أن  $N$   
 مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D,1)$  و  $(M,-2)$  ومنه  $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DM}$ .

3 في المقولات الآتية، بين الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

- ①  $ABC$  مثلث. مهما كانت  $D$  من الفراغ كانت الأشعة  $\overrightarrow{DA}$  و  $\overrightarrow{DB}$  و  $\overrightarrow{DC}$  مرتبطة خطياً.
- ②  $ABCD$  رباعي الوجوه. لنكن  $I$  النقطة المعروفة بالعلاقة  $\overrightarrow{2IA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ . عندئذ  
 تقع  $I$  على أحد حروف رباعي الوجوه.
- ③ نتأمل الأشعة  $\overrightarrow{AD}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AB}$ . نفترض أن أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، عندها  
 تكون الأشعة  $\overrightarrow{AD}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AB}$  غير مرتبطة خطياً.
- ④ النقاط  $A(5,1,3)$  و  $B(2,-\sqrt{5},-2)$  و  $C(3,-3,3)$  متساوية البعد عن  $K(2,0,1)$ .
- ⑤ النقاط  $C(4,0,0)$  و  $D(0,-2,0)$  و  $E(1,2,6)$  و  $F(5,1,1)$  تنتمي إلى المستوي المحوري  
 للقطعة المستقيمة التي طرفيها  $A(4,-2,2)$  و  $B(2,2,0)$ .

① المقولة خطأ، فإذا كانت  $D$  في المستوي  $(ABC)$  كانت الأشعة مرتبطة خطياً، أما إذا كانت  $D$  خارج المستوي  $(ABC)$  كانت الأشعة غير مرتبطة خطياً.

② المقولة صحيحة لأنه بالاستفادة من علاقة شال ومن العلاقة المعطاة نجد

$$\begin{aligned} \vec{2IB} &= \vec{2IA} + \vec{2AB} = \vec{DA} + \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{2AB} \\ &= \vec{DA} + \vec{AB} + \underbrace{\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}}_{\vec{0}} = \vec{DB} \end{aligned}$$

إذن  $I$  منتصف الحرف  $BD$ .

③ المقولة خطأ إذا قد تقع النقطة  $D$  في المستوي  $ABC$  وعندها تكون الأشعة  $\vec{AD}$  و  $\vec{AC}$  و  $\vec{AB}$  مرتبطة خطياً.

④ المقولة صحيحة ، لنحسب الأطوال  $AK, BK, CK$  فنجد  $AK = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$  و

$BK = \sqrt{0+5+9} = \sqrt{14}$  و  $CK = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$  إذن النقطة  $K$  متساوية البعد عن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$ .

⑤ المقولة ليست صحيحة ، لأن أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$  تكون متساوية البعد عن طرفيها، ولكن  $\vec{EA}(3, -4, -4)$  ومنه  $EA = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$ ، ولدينا  $\vec{EB}(1, 0, -6)$  ومنه  $EB = \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37}$ . إذن  $EA \neq EB$ .



## لنتعلم البحث معاً

### 4 إثبات وقوع تقاطع في مستوي واحد

نتأمل، في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط الآتية :

$$A(2,0,1) \text{ و } B(1,-2,1) \text{ و } C(5,5,0) \text{ و } D(-3,-5,6) \text{ و } E(3,1,2).$$

أثبت انتماء النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  إلى مستوي واحد  $P$ ، وتبين إذا كانت النقطة  $E$  تنتمي إلى المستوي  $P$ .

#### نحو الحل

غير مجد هنا رسم شكل. إذ تكمن الفائدة الوحيدة من الرسم في العمل على إظهار نقاط تقع على استقامة واحدة. ولكن قد تبدو النقاط في شكل فراغي على استقامة واحدة دون أن تكون كذلك. في حين تدعونا معرفة إحداثيات النقاط المفروضة إلى التعامل مع المسألة تحليلياً.

يتعلق الأمر بمعرفة إذا كانت النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  واقعة في مستوي واحد. لهذا، نتحرى وجود شعاعين غير مرتبطين خطياً من بين الأشعة  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  و  $\vec{AD}$ .

$$1. \text{ احسب مركبات كل من } \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} \text{ و } \vec{AD}.$$

$$2. \text{ استنتج أن } \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} \text{، على سبيل المثال، غير مرتبطين خطياً.}$$

استناداً إلى المبرهنة 4، يؤول إقرار انتماء نقطة  $D$  إلى المستوي  $(ABC)$ ، إلى وجود عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  يحققان  $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ .

1. اكتب المساواة الشعاعية السابقة بلغة الإحداثيات، وتحقق أنك ستحصل على جملة من ثلاث

معادلات خطية بالمجهولين  $a$  و  $b$  هي:

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

2. لحل مثل هذه الجملة من المعادلات، اختر جملة من معادلتين من هذه المعادلات الثلاث وحلها. هل العدان  $a$  و  $b$  اللذان وجدتهما حلولاً للمعادلة الثالثة؟ أكمل.

3. تصرّف بالمثل مع النقطة  $E$ .

أنجز الحل وكتبه بلغة سليمة.

نلاحظ أن

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -2, 0) \text{ و } \overrightarrow{AC} = (3, 5, -1) \text{ و } \overrightarrow{AD} = (-5, -5, 5)$$

نلاحظ أن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما ليست متناسبة إذن  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستويًا  $(ABC)$  وتكون  $D$  نقطة من المستوي  $(ABC)$  إذا فقط وإذا وجد عدنان  $a$  و  $b$  يحققان  $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$  أي

$$(-5, -5, 5) = a(-1, -2, 0) + b(3, 5, -1)$$

$$\text{أي } (-5, -5, 5) = (-a + 3b, -2a + 5b, -b) \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 & \textcircled{1} \\ -2a + 5b = -5 & \textcircled{2} \\ -b = 5 & \textcircled{3} \end{cases}$$

ومن  $b = -5$  وبالتعويض في  $\textcircled{1}$  نجد  $a = -10$  ونلاحظ أن حل المعادلتين  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{3}$  يحقق المعادلة  $\textcircled{2}$  إذن  $\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$  وبالتالي فالأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AD}$  مرتبطة خطياً والنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع في مستو واحد.

لنبحث الآن عن عددين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث يكون  $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$  أي

$$(1, 1, 1) = \alpha(-1, -2, 0) + \beta(3, 5, -1)$$

ومن

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 1 & \textcircled{1} \\ -2\alpha + 5\beta = 1 & \textcircled{2} \\ -\beta = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

من  $\textcircled{3}$  تكون  $\beta = -1$  وبالتعويض في  $\textcircled{2}$  نجد  $\alpha = -3$  ونلاحظ أن الحل الناتج  $(\alpha = -3, \beta = -1)$  لا يحقق المعادلة  $\textcircled{1}$  ومنه فالأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AE}$  غير مرتبطة خطياً والنقطة  $E$  لا تنتمي إلى المستوي  $\mathcal{P}$ .

## 5 إثبات تقاطع مستقيمين

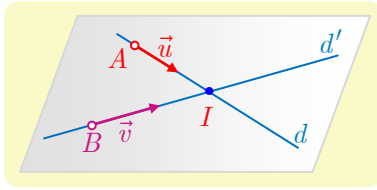
في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطتان  $A(3, -1, 1)$  و  $B(3, -3, -1)$ ، والشعاغان  $\vec{u}(1, 0, -2)$  و  $\vec{v}(2, 1, -3)$ .  $d$  هو المستقيم المار بالنقطة  $A$  والموجّه بالشعاع  $\vec{u}$ ، و  $d'$  هو المستقيم المار بالنقطة  $B$  والموجّه بالشعاع  $\vec{v}$ . أثبت أنّ المستقيمين  $d$  و  $d'$  متقاطعان، ثمّ عيّن نقطة تقاطعهما.

## نحو الحل

ليس مفيداً، هنا، رسمُ شكل بالنقاط والأشعة والمستقيمتين المفترضة. إذ قد يبدو مستقيمان في الفراغ متقاطعين، دون أن يكونا كذلك، لأنهما غير واقعين في مستوٍ واحد. يتعلّق الأمر بإثبات تقاطع مستقيمين من الفراغ، إذن يجب إثبات أنّهما غير متوازيين ويقعان في مستوٍ واحد. وتدعونا معرفة إحداثيات النقاط ومركبات الأشعة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

1. أثبت أنّ  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مرتبطين خطياً.

2. ما قولك بشأن المستقيمين  $d$  و  $d'$ ؟



يبقى إثبات وقوع المستقيمين  $d$  و  $d'$  في مستوٍ واحد. المستقيم  $d$  والنقطة  $B$  يعينان مستوياً  $P$  طالما  $B$  لا تقع على  $d$ . فلا إثبات أنّ  $d$  و  $d'$  يقعان في مستوٍ واحد، يكفي إثبات أنّ الأشعة  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطة خطياً.

1. تحقق، بذكر المبرهنة ذات الصلة، أنّ المسألة تؤول إلى إثبات وجود عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  يحققان  $\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

2. اكتب المساواة السابقة بلغة الإحداثيات، فتحصل على جملة من ثلاث معادلات خطية بمجهولين.

3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلفة منهما. أياكون العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  اللذان وجدتهما حلاً للمعادلة الثالثة؟ أتمم.

لحساب إحداثيات  $I(x, y, z)$ ، نقطة تقاطع المستقيمين  $d$  و  $d'$ . نسعى، بالتعامل شعاعياً، إلى التوثق من أنّ  $I$  تقع على كلّ من  $d$  و  $d'$ .

1. تحقق من وجود عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  يحققان  $\vec{AI} = \alpha\vec{u}$  و  $\vec{BI} = \beta\vec{v}$ .

2. اكتب هاتين المساواتين بلغة الإحداثيات لتستنتج  $\alpha$  و  $\beta$  ومن ثمّ إحداثيات النقطة  $I$ .

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

1. الشعاعان  $\vec{u}(1,0,-2)$  و  $\vec{v}(2,1,-3)$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.
2. لما كان الشعاعان غير مرتبطين خطياً كان المستقيمان  $d$  و  $d'$  غير متوازيين.
3. النقطة  $B$  لا تقع على المستقيم  $d$  فرضاً، فالمستقيم  $d$  والنقطة  $B$  يعينان مستويًا  $\mathcal{P}$ . ولكي نثبت أن  $d$  و  $d'$  يقعان في مستوٍ واحد، نثبت أن الأشعة  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\overrightarrow{AB}$  مرتبطة خطياً.
1. لنثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  يحققان :  $\overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$ .
2. العلاقة الشعاعية تكافئ :  $(0, -2, -2) = a(1, 0, -2) + b(2, 1, -3)$ . ومنه جملة المعادلات

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 0 + b = -2 \\ -2a - 3b = -2 \end{cases}$$

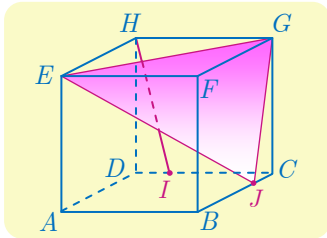
3. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نجد  $b = -2$  و  $a = 4$ ، وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد أنها محققة. إذن يقع المستقيمان  $d$  و  $d'$  في مستوٍ واحد. وهما متقاطعان في نقطة  $I$  لأننا أثبتنا أن  $d$  و  $d'$  غير متوازيين .

لحساب إحداثيات  $I(x, y, z)$ ، نستفيد من انتماء النقطة  $I$  إلى كل من  $d$  و  $d'$ .

1. لأن  $I \in d$  يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  يحقق  $\overrightarrow{AI} = \alpha \cdot \vec{u}$ . ولأن  $I \in d'$  يوجد عدد حقيقي  $\beta$  يحقق  $\overrightarrow{BI} = \beta \cdot \vec{v}$ .

2. نستنتج إذن أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \alpha \vec{u} - \beta \vec{v}$  وهذا يقتضي أن يكون  $\alpha = 4$  و  $\beta = 2$  استناداً إلى الفقرة السابقة. إذن  $\overrightarrow{AI} = 4\vec{u}$  أو  $(x - 3, y + 1, z - 1) = 4(1, 0, -2)$ . ومنه نجد أن  $I(7, -1, -7)$ .

## 6 النوازي في الفراغ



لنتأمل المكعب  $ABCDEFGH$ . النقطة  $I$  من الحرف  $[CD]$  نُحَقِّق المساواة  $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ ، والنقطة  $J$  من  $[BC]$  نُحَقِّق المساواة  $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ . أثبت أن المستقيم  $(HI)$  يوازي المستوي  $(EGJ)$ .

نحو الحل

لا يُظهر الشكل مستقيماً من المستوي  $(EGJ)$  موازياً  $(HI)$ . إذ لو كان مستقيماً من المستوي  $(EGJ)$  موازياً  $(HI)$ ، لتأكد لنا أن المستقيم  $(HI)$  يوازي المستوي  $(EGJ)$ . لنفكر إذن بالتعامل مع المسألة تحليلياً. نختار  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  معلماً للفراغ، لأنه من السهل تعيين إحداثيات نقاط الشكل في هذا المعلم. عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقاط  $G, E, J, I, H$ .

لإثبات أن المستقيم  $(HI)$  يوازي المستوي  $(EGJ)$ ، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال، إثبات أن الأشعة  $\overrightarrow{HI}$  و  $\overrightarrow{EG}$  و  $\overrightarrow{EJ}$  واقعة في مستوٍ واحد.

1. أثبت أن هذا يقودنا إلى إثبات وجود عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  يُحقّقان  $\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$   
 2. اكتب هذه المساواة الشعاعية بلغة الإحداثيات: ستحصل على جملة من ثلاث معادلات بمجهولين.

3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلفة منهما. هل العددين الحقيقيين  $x$  و  $y$  اللذان وجدتهما حلول للمعادلة الثالثة؟

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

حلّ آخر

فيما سبق، لم نسع إلى إظهار مستقيم في المستوي  $(EGJ)$  يوازي  $(HI)$ ، فلجأنا إلى التعامل مع الإحداثيات. ولكن دراسة تقاطع المكعب مع المستوي  $(EGJ)$ ، تظهر مستقيماً من هذا القبيل. المستويان  $(EFG)$  و  $(ABC)$  متوازيان، والمستوي  $(EGJ)$  يقطعهما بفصلين مشتركين متوازيين.  
 1. ارسم الفصل المشترك للمستويين  $(EGJ)$  و  $(ABC)$ ، ولتكن  $K$  نقطة تقاطعه مع  $(AB)$ .

بين لماذا  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ؟ أثبت أن  $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{HI}$ .

2. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين  $(HI)$  و  $(EK)$ ؟ وكذلك بشأن المستقيم  $(HI)$  والمستوي  $(EGJ)$ ؟

أنجز الحلّ الآخر واكتبه بلغة سليمة.

الحل

نختار  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  معلماً في الفراغ، فنجد إحداثيات النقاط  $G, E, J, I, H$ :

$$G(1,1,1), E(0,0,1), J(1, \frac{3}{4}, 0), I(\frac{1}{4}, 1, 0), H(0,1,1)$$

1. لنثبت أن الأشعة  $\overrightarrow{HI}$  و  $\overrightarrow{EG}$  و  $\overrightarrow{EJ}$  واقعة في مستوٍ واحد، أي نثبت وجود عددين  $x$  و  $y$

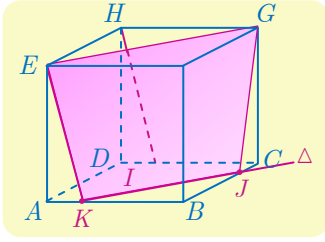
$$\text{يحققان العلاقة } \textcircled{1} \overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}.$$

2. لدينا  $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4}, 0, -1)$  و  $\overrightarrow{EG}(1, 1, 0)$  و  $\overrightarrow{EJ}(1, \frac{3}{4}, -1)$  وبالتعويض في العلاقة  $\textcircled{1}$  نجد:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{4} & (1) \\ x + \frac{3}{4}y = 0 & (2) \\ 0 - y = -1 & (3) \end{cases}$$

3. وبحل المعادلتين الأولى والثانية نجد أن  $y=1$  و  $x = -\frac{3}{4}$  ومن المعادلة الثالثة لدينا  $y=1$  وهذا يوافق الحل الناتج، إذن أصبح لدينا  $\vec{HI} = -\frac{3}{4}\vec{EG} + \vec{EJ}$  فالأشعة  $\vec{EJ}$  و  $\vec{EG}$  و  $\vec{HI}$  تقع في مستوي واحد ومنه  $(EGJ)$  يوازي  $(HI)$ .

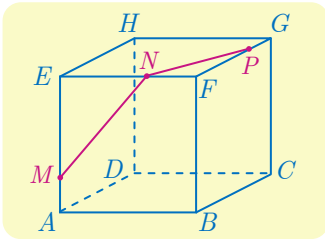
حل آخر:



1. المستويان  $(EFG)$  و  $(ABC)$  متوازيان قطعناهما بمستوي  $(EGJ)$  فهو يحدد عليهما فصلين مشتركين متوازيين. وبالتالي  $(EG)$  يوازي  $\Delta$ ، حيث  $\Delta$  مستقيم مار من  $J$  ويوازي  $(EG)$  أي يوازي  $(AC)$ ، ومنه  $\Delta$  يقطع  $AB$  في نقطة  $K$  حيث  $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ .

لدينا إذن  $\vec{DI} = \frac{1}{4}\vec{DC} = \frac{1}{4}\vec{AB} = \vec{AK}$ ، و  $\vec{DH} = \vec{AE}$ ، إذن  $\vec{HI} = \vec{DI} - \vec{DH} = \vec{EK}$

2. نستنتج إذن أن  $(HI) \parallel (EK)$ ، ولكن  $(EK)$  محتوي في المستوي  $(EJK)$  ومنه  $(HI)$  يوازي  $(EGJ)$ .



7 متقطع مكعب بمسئو

مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب.  $M$  و  $N$  و  $P$  ثلاث نقاط من الأحرف  $[AE]$  و  $[EF]$  و  $[FG]$  بالترتيب، كما في الشكل المجاور. يُطلب إيجاد مقطع المكعب بالمستوي  $(MNP)$ .

نحو الحل

نريد تعيين تقاطع المستوي  $(MNP)$  مع وجوه المكعب. ولكن بم نبدأ؟ نعلم أنه عندما يقطع المستوي  $(MNP)$  وجهين متقابلين من المكعب، وهما في مستويين متوازيين، يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيين.

1. أي وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع  $(MNP)$  ويوازي  $(MN)$ ؟

2. أي وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع  $(MNP)$  ويوازي  $(NP)$ ؟

3. أي وجه تختار إذن لتتعامل معه؟



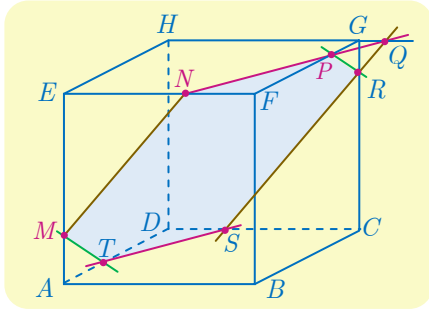
لنبدأ، على سبيل المثال، بالبحث عن تقاطع المستوي  $(MNP)$  مع الوجه  $(DCGH)$ . لإيجاد الفصل المشترك لهذين المستويين، يكفي إيجاد نقطة مشتركة بينهما. لنبحث إذن عن نقطة من هذا القبيل.

1. لماذا نقطة تقاطع  $(PN)$  و  $(HG)$  ملائمة؟ ارمز إلى تلك النقطة بالرمز  $Q$ .
2. المستقيم المار بالنقطة  $Q$  موازياً للمستقيم  $(MN)$ ، يقطع  $(CG)$  في  $R$  ويقطع  $(DC)$  في  $S$ . حدّد الفصل المشترك للمستوي  $(MNP)$  والوجه  $(DCGH)$ .

1. لماذا يفيد المستقيم المار بالنقطة  $S$  موازياً  $(PN)$ ، في تحديد الفصل المشترك للمستوي  $(MNP)$  والوجه  $(ABCD)$ ؟ لتكن  $T$  نقطة تقاطعه مع  $[AD]$ .

2. ما الفصل المشترك للمستوي  $(MNP)$  مع كلٍّ من الوجهين  $(BCGF)$  و  $(ADHE)$ ؟

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.

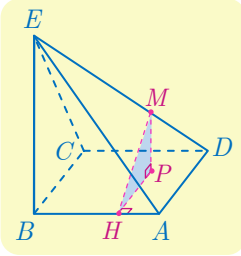


الحل

1.  $(MNP)$  يقطع  $(DCGH)$  بفصل مشترك يوازي  $MN$ .
2.  $(MNP)$  يقطع  $(ABCD)$  بفصل مشترك يوازي  $NP$ .
3. نختار مثلاً  $(DCGH)$ .

لتعيين الفصل المشترك للمستويين  $(MNP)$  و  $(DCGH)$  نحتاج إلى نقطة مشتركة بينهما. لتكن  $Q$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(HG)$  و  $(PN)$  فهي نقطة مشتركة بين المستويين  $(MNP)$  و  $(DCGH)$ . سيكون الفصل المشترك المطلوب هو المستقيم المار بالنقطة  $Q$  ويوازي  $(MN)$ ، وهو يقطع  $(CG)$  في  $R$ ، ويقطع  $(CD)$  في  $S$ ، فالفصل المشترك هو  $(SR)$ .

- نقطة  $S$  مشتركة بين المستويين  $(MNP)$  و  $(ABCD)$  فالمستقيم المار بالنقطة  $S$  موازياً  $(NP)$  هو الفصل المشترك للمستويين السابقين فيقطع  $(AD)$  في  $T$ ، فالفصل المشترك هو  $(ST)$ .
2. الفصل المشترك للمستويين  $(MNP)$  و  $(BCGF)$  هو المستقيم  $(PR)$ .
  - الفصل المشترك للمستويين  $(MNP)$  و  $(ADHE)$  هو المستقيم  $(MT)$ .



$ABCDE$  هرم رأسه  $E$  وقاعدته مربع.  $[BE]$  عمودي على المستوي  $(ABCD)$ ،  $EB = 4\sqrt{2}$  و  $AB = 4$ . نقطة  $M$  من القطعة  $[ED]$  تحقق  $\overrightarrow{3DM} = \overrightarrow{DE}$ . لنكن  $P$  المسقط القائم للنقطة  $M$  على المستوي  $(ABCD)$  و  $H$  المسقط القائم للنقطة  $P$  على المستقيم  $(AB)$ . احسب طول القطعة المستقيمة  $[MH]$ .

نحو الحل

تدعونا مختلف أوضاع التعامد والتساوي في الشكل إلى التعامل تحليلياً مع هذا التمرين. يحضرنا،

هنا، المعلم المتجانس  $(B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  حيث  $\overrightarrow{BA} = 4\vec{i}$  و  $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$  و  $\overrightarrow{BE} = 4\sqrt{2}\vec{k}$ .

1. جد، في هذا المعلم، إحداثيات كل من النقطتين  $E$  و  $D$ .

2. حدّد إحداثيات النقطة  $M$ .

$P$  هي المسقط القائم للنقطة  $M$  على المستوي  $(ABCD)$ ، فتُستنتج إحداثيات  $P$ ، بسهولة، من

إحداثيات النقطة  $M$ . وبالمثل، تُستنتج إحداثيات النقطة  $H$  من إحداثيات  $P$ .

1. حدّد إحداثيات كل من النقطتين  $H$  و  $P$ .

2. احسب طول  $[MH]$ .

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.

الحل

لدينا المعلم المتجانس  $(B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  عندئذ تكون:

1. إحداثيات  $D(4, 4, 0)$  و  $E(0, 0, 4\sqrt{2})$ .

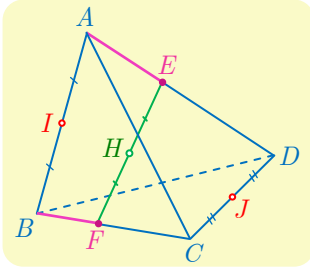
2. نفترض النقطة  $M(x, y, z)$  من  $ED$  تحقق  $\overrightarrow{3DM} = \overrightarrow{DE}$  ومنه

$$3(x-4, y-4, z-0) = (-4, -4, 4\sqrt{2}) \text{ فينتج } z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ و } y = \frac{8}{3} \text{ و } x = \frac{8}{3} \text{ ومنه } M\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

1.  $P$  هي المسقط القائم للنقطة  $M$  على  $(ABCD)$  إذن  $P\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$  فيكون  $H\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$ .

2. حسب فيثاغورث في المثلث  $MPH$  القائم في  $P$ ، حيث  $MP = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  و  $PH = \frac{8}{3}$  نجد

$$MH = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



9  $ABCD$  رباعي وجوه، و  $a$  عددٌ حقيقي.  $I$  و  $J$  هما، بالترتيب، منتصفا  $[AB]$  و  $[CD]$ . و  $E$  و  $F$  نقطتان تحقّقان، العلاقتين:  $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$  و  $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ . وأخيراً  $H$  هي منتصف  $[EF]$ . أثبت أنّ  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة.

نحو الحل

نهدف إلى إثبات وقوع ثلاث نقاط من الفراغ على استقامة واحدة. تدعونا الفرضيات التي تحدد نقاط الشكل إلى استعمال مركز الأبعاد المتناسبة أداةً للإثبات. يكفي إذن، على سبيل المثال، إثبات أنّ  $H$  هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين  $I$  و  $J$ . وقد أسندنا إليهما ثقلين مناسبين.

1. تبيّن أنّ  $E$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-a)$  و  $(D, a)$ ، وأنّ  $F$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1-a)$  و  $(C, a)$ .
2. بالاستفادة من الخاصّة التجميعيّة، أثبت أنّ  $H$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-a)$  و  $(B, 1-a)$  و  $(C, a)$  و  $(D, a)$ .
3. استنتج أنّ النقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة.

أنجز الحلّ الآخر واكتبه بلغة سليمة.

الحل

لإثبات أنّ النقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  على استقامة واحدة، يكفي أن نثبت أنّ  $H$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $I$  و  $J$  وقد أسند لها ثقلين مناسبين.

1. من الفرض لدينا  $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$  ومنه  $\overrightarrow{EA} + a\overrightarrow{ED} = \vec{0}$ ، إذن  $E$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-a)$  و  $(D, a)$ .

ومن الفرض لدينا  $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$  ومنه  $\overrightarrow{FB} + a\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ ، إذن  $F$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1-a)$  و  $(C, a)$ .

2. ولما كان  $H$  منتصف  $[FE]$  كان  $H$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(E, 1)$  و  $(F, 1)$ . وحسب

الخاصّة التجميعيّة تكون  $H$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-a)$  و  $(B, 1-a)$  و  $(C, a)$  و  $(D, a)$ .

3. ولما كان  $I$  منتصف  $[AB]$  كان  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-a)$  و  $(B, 1-a)$

ولما كان  $J$  منتصف  $[CD]$  كان  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C, a)$  و  $(D, a)$ . وحسب

الخاصّة التجميعيّة تكون  $H$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-a)$  و  $(B, 1-a)$  و  $(C, a)$  و

$(D, a)$ ، هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I, 2-2a)$  و  $(J, 2a)$ ، فالنقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة وهو المطلوب.



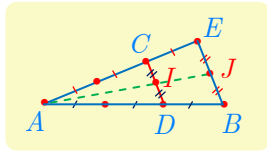
## قُدماً إلى الأمام

**10** ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ. و  $D$  و  $E$  نقطتان تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \text{ و } 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

- ① أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  تقع في مستوٍ واحد.
- ② لتكن  $I$  منتصف  $[CD]$  و  $J$  منتصف  $[BE]$ . أثبت أن  $A$  و  $I$  و  $J$  تقع على استقامة واحدة.

**الحل**



① لدينا  $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$  إذن النقاط  $A$  و  $B$  و  $D$  تقع على استقامة واحدة ومنه  $D$  تقع على المستقيم  $(AB)$  المحتوي في  $(ACB)$ . وبالمثل من العلاقة  $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$  نجد أن  $E$  تقع على المستقيم  $(AC)$  المحتوي في  $(ACB)$ . وبالتالي النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  تقع في مستوٍ واحد هو  $(ACB)$ .

②  $I$  منتصف  $[CD]$  و  $J$  منتصف  $[BE]$ ، إذن

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

ومنه  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ ، فالنقاط  $A$  و  $I$  و  $J$  تقع على استقامة واحدة.

**11**  $ABCD$  رباعي وجوه. و  $E$  و  $F$  و  $G$  هي نظائر  $A$  بالنسبة إلى منتصفات  $[BC]$  و  $[CD]$  و

$[DB]$  بالترتيب.

- ① أثبت أن  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$  و  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ .
- ② استنتج أن للقطعتين  $[DE]$  و  $[FB]$  المنتصف نفسه.
- ③ أثبت أن المستقيمات  $(BF)$  و  $(DE)$  و  $(CG)$  متلاقية في نقطة واحدة.

**الحل**

① استناداً إلى خواص متوازي الأضلاع  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$  ومنه باستعمال علاقة شال:

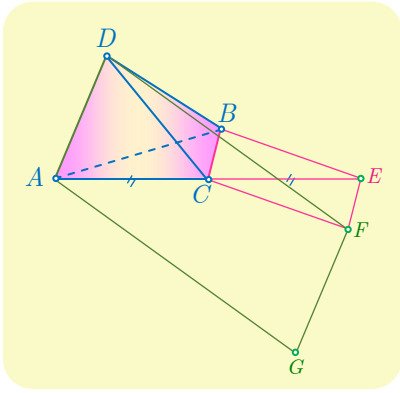
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$$

- ② إذن  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$ ، والرباعي  $BEFD$  متوازي الأضلاع، فقطراه  $[DE]$  و  $[FB]$  متناصفان.  
 ③ نجد بالمثل أنّ  $[DE]$  و  $[CG]$  متناصفان.

**12**  $ABCD$  رباعي وجوه. و  $E$  هي نظيرة  $A$  بالنسبة إلى  $C$ ، و  $F$  و  $G$  هما النقطتان اللتان تجعلان  $EBCF$  و  $FDAG$  متوازي الأضلاع.

- ① أثبت أنّ  $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$ .  
 ② استنتج أنّ  $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ ، ثمّ أنّ النقاط  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $G$  تقع في مستوٍ واحد.

الحل



- ① عملاً بالفرض يمكن أن نكتب  

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$$
 ② لدينا  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$  لأن  $C$  منتصف  $[AE]$  واستناداً إلى ① نجد

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

أي كُتِب الشعاع  $\overrightarrow{DG}$  عبارة خطية بدلالة الشعاعين  $\overrightarrow{DC}$  و  $\overrightarrow{DB}$  فالنقاط  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $G$  تقع في مستوٍ واحد.

**13** نتأمل في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(3, 2, 1)$  و  $B(1, 2, 0)$  و  $C(3, 1, -2)$ .

- ① أثبت أنّ النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.  
 ② عند أية قيمة للوسيط  $m$  تنتمي النقطة  $M(m, 1, 3)$  إلى المستوي  $(ABC)$ ؟  
 ③ ما العلاقة بين  $x$  و  $y$  لتقع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D(x, y, 3)$  في مستوٍ واحد؟

الحل

① لدينا في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا  $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -1)$  و  $\overrightarrow{AC}(0, -1, -3)$ ، فالشعاغان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، والنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة، فهي تشكل مستوياً.

② تنتمي  $M(m,1,3)$  إلى المستوي  $(ABC)$  إذا وجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  يحققان العلاقة :

$$\overrightarrow{AM} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC} \text{ ، أي } (m-3, -1, 2) = a(-2, 0, -1) + b(0, -1, -3) \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} m-3 = -2a \\ -1 = -b \\ 2 = -a-3b \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد  $b = 1$  ، و  $a = -5$  ومن ثم  $m = 13$  .

③ تقع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D(x, y, 3)$  في مستوي واحد إذا وجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  يحققان

$$\text{العلاقة } \overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} x-3 = -2\alpha & \text{①} \\ y-2 = -\beta & \text{②} \\ 2 = -\alpha-3\beta & \text{③} \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد  $\beta = -y + 2$  و  $\alpha = \frac{-x+3}{2}$  وبالتعويض في ③ نجد  $x + 6y = 19$  .

## 14 مجموعة تقاطع

لنكن  $\mathcal{E}$  مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق إحداثياتها العلاقة :  $x - 2y + 3z - 5 = 0$  .

① أثبت أن النقاط  $A(7, 1, 0)$  و  $B(5, 0, 0)$  و  $C(2, 0, 1)$  تنتمي إلى المجموعة  $\mathcal{E}$  .

② أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تحدد مستويًا  $\mathcal{P}$  .

③ أثبت أن مركبات الشعاع  $\overrightarrow{BM}$  هي  $(2y - 3z, y, z)$  .

④ استنتج أن  $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$  . ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك؟

④ بالعكس، أثبت أن أية نقطة  $M(x, y, z)$  من المستوي  $\mathcal{P}$  تحقق المعادلة:

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

ما هي المجموعة  $\mathcal{E}$  ؟

الحل

① مجموعة النقاط  $\mathcal{E}$  هي نقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق إحداثياتها العلاقة  $x - 2y + 3z - 5 = 0$  . نلاحظ أن إحداثيات النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تحقق العلاقة المعطاة، إذن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  هي نقاط من المجموعة  $\mathcal{E}$  .

② لما كان الشعاعان  $\overrightarrow{AB}(-2, -1, 0)$  و  $\overrightarrow{AC}(-5, -1, 1)$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، كانت النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير واقعة على استقامة واحدة، فهي تحدد مستويًا  $\mathcal{P}$  .

③ *a.* من جهة أولى  $\overrightarrow{BM} = (x-5, y, z)$ ، ولأنّ النقطة  $M$  من  $\mathcal{E}$  فإنّ  $x-2y+3z-5=0$  ومنه  $x-5=2y-3z$ ، إذن  $\overrightarrow{BM} = (2y-3z, y, z)$ .

*b.* لما كان  $(2y-3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$ ، كان  $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$ ، ومنه نستنتج أنّ النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $M$  تقع في مستوٍ واحد  $\mathcal{P}$ .

④ وبالعكس. إذا كانت النقطة  $M$  تقع في المستوي  $\mathcal{P}$ ، يوجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  يحققان العلاقة:  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ . ولدينا  $\overrightarrow{AM} = (x-7, y-1, z)$ ، إذن

$$(x-7, y-1, z) = \alpha(-2, -1, 0) + \beta(-5, -1, 1)$$

هذا يكافئ

$$\begin{cases} x-7 = -2\alpha - 5\beta & \textcircled{1} \\ y-1 = -\alpha - \beta & \textcircled{2} \\ z = \beta & \textcircled{3} \end{cases}$$

بحساب  $\alpha$  و  $\beta$  من المعادلتين الأخيرتين ثم بالتعويض في الأولى نجد  $x-7 = 2(y+z-1) - 5z$  أو  $x-2y+3z-5=0$ ، إذن  $M$  تنتمي إلى  $\mathcal{E}$ . وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ  $\mathcal{P} = \mathcal{E}$ .

15 نتأمل في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستقيم  $d$  المارّ بالنقطة  $A(2, 0, 5)$  والموجّه بالشعاع  $\vec{u}(2, 5, -1)$ ، والمستقيم  $d'$  المارّ بالنقطة  $B(2, 2, -1)$  والموجّه بالشعاع  $\vec{v}(1, 2, 1)$ . هل  $d$  و  $d'$  متقاطعان؟ في حالة الإيجاب، أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

الشعاعان  $\vec{u}(2, 5, -1)$  و  $\vec{v}(1, 2, 1)$  غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، إذن المستقيمان  $d$  و  $d'$  غير متوازيين، لنرى هل يقعان في مستوٍ واحد؟ يقع المستقيمان  $d$  و  $d'$  في مستوٍ واحد إذا وجد عدنان حقيقيان  $\alpha$  و  $\beta$  يحققان  $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ، أي

$$(0, 2, -6) = \alpha(2, 5, -1) + \beta(1, 2, 1)$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 & \textcircled{1} \\ 5\alpha + 2\beta = 2 & \textcircled{2} \\ -\alpha + \beta = -6 & \textcircled{3} \end{cases}$$

بحل المعادلتين ① و ③ نجد  $\alpha=2$  و  $\beta=-4$ ، وبتعويض هذه النتائج في المعادلة ② نجدها محققة إذن  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$ ، والمستقيمان  $d$  و  $d'$  يقعان في مستوٍ واحد وغير متوازيين، فهما متقاطعان في نقطة  $I$ . تُحقّق  $\overrightarrow{AI} = a \cdot \vec{u}$  و  $\overrightarrow{BI} = b \cdot \vec{v}$ ، إذن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = a\vec{u} - b\vec{v}$ ، ولكن

وجدنا أنّ هذه المساواة تقتضي أن يكون  $a = 2$  و  $b = 4$ . ومن المساواة  $\overrightarrow{AI} = 2 \cdot \vec{u}$  نستنتج أنّ إحداثيات  $I(x, y, z)$  تحقق،  $I(6, 10, 3) = (4, 10, -2)$  أي  $(x - 2, y, z - 5) = (4, 10, -2)$ .

**16** جدّ على محور الفواصل نقطة  $C$  متساوية البعد عن النقطتين  $A(2, -1, 3)$  و  $B(0, 5, -1)$ .

الجل

لأنّ النقطة  $C$  تقع على محور الفواصل كانت  $C(x, 0, 0)$ . ولأنّ  $C$  متساوية البعد عن النقطتين  $A$  و  $B$  كان  $CA = CB$  ومنه  $CA^2 = CB^2$  أي  $(x - 2)^2 + 1 + 9 = x^2 + 25 + 1$ . ومنه  $x = -3$ ، فإحداثيات  $C$  هي  $(-3, 0, 0)$ .

**17** ليكن  $\alpha$  عدداً حقيقياً، ولنتأمل النقاط الثلاث  $A(3, 1, -3)$  و  $B(-1, 5, -3)$  و  $C(-1, 1, \alpha)$ . أثبت أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين، أيّاً كان  $\alpha$ . أيمن أن يكون متساوي الأضلاع؟

الجل

لدينا

$$CB = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3 - \alpha)^2} = \sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha}$$

$$CA = \sqrt{4^2 + 0 + (3 - \alpha)^2} = \sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha}$$

وهكذا نجد أنه مهما تكن  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $CA = CB$  والمثلث متساوي الساقين رأسه  $C$ .

حتى يكون هذا المثلث متساوي الأضلاع يجب أن يكون  $CB = AB$  أي

$$\sqrt{25 + \alpha^2 + 6\alpha} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0}$$

وبالإصلاح نجد  $\alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$  ولهذه المعادلة حلان  $\alpha = 1$  و  $\alpha = -7$ . إذن يمكن أن يكون

المثلث متساوي الأضلاع عند قيمتين للعدد الحقيقي  $\alpha$ .

**18** نتأمل النقطتين  $A(2, 1, 0)$  و  $B(-1, 4, 2)$ .

① أوجد نقطة متساوية البعد عن  $A$  و  $B$ .

② أوجد العدد الحقيقي  $\lambda$  الذي يجعل النقطة  $C(1, 1, \lambda)$  متساوية البعد عن  $A$  و  $B$ .

③ أثبت أنّ «  $M(x, y, z)$  نقطة من المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  » إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\llcorner 3x - 3y - 2z + 8 = 0 \llcorner$$

الجل



① خذ  $N$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  أي  $N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ .

② انطلاقاً من  $CB^2 = CA^2$  نجد  $2^2 + 3^2 + (\lambda - 2)^2 = 1^2 + 0 + \lambda^2$  أي  $\lambda = 4$ .

③ أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  تكون متساوية البعد عن طرفيها وبالعكس إذا كانت  $M(x, y, z)$  متساوية البعد عن  $A$  و  $B$  فإنها تقع على المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  وبالتالي  $M(x, y, z)$  نقطة من المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  إذا وفقط إذا تحقق  $BM = AM$  أي  $BM^2 = AM^2$  ومنه

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

وبإصلاح المعادلة نجد

$$.3x - 3y - 2z + 8 = 0$$

## 19 بُعد نقطة عن مستقيم

نتأمل النقاط  $A(2, 3, 0)$  و  $B(2, 3, 6)$  و  $M(4, -1, 2)$ . نهدف إلى حساب بُعد  $M$  عن المستقيم  $(AB)$ .

① أثبت أنّ  $M$  لا تقع على المستقيم  $(AB)$ .

② أثبت أنّ لكل نقطة  $K$  من المستقيم  $(AB)$  إحداثيات من النمط  $(2, 3, z)$ .

③ احسب  $MK^2$  بدلالة  $z$ .

④ عند أية قيمة للعدد  $z$  يكون  $MK$  أصغر ما يمكن؟ حدّد إذن بُعد  $M$  عن  $(AB)$ .

### الحل

① لدينا  $\overrightarrow{MA} = (2, -4, 2)$  و  $\overrightarrow{MB} = (2, -4, -4)$  نلاحظ أن  $\frac{2}{2} = \frac{-4}{-4} \neq \frac{-4}{-4}$  فالشعاعان  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{BM}$  غير مرتبطان خطياً، ولا تقع النقاط  $A$  و  $M$  و  $B$  على استقامة واحدة، أي لا تقع  $M$  على المستقيم  $(AB)$ .

②  $K$  نقطة من المستقيم  $(AB)$ ، إذا وفقط إذا كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-t)$  و  $(B, t)$  حيث  $t$  عدد حقيقي ما. فإذا كانت  $(x, y, z)$  إحداثيات  $K$  كان

$$(x, y, z) = (1-t)(2, 3, 0) + t(2, 3, 6) = (2, 3, 6t)$$

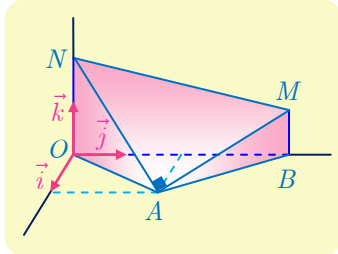
أي إنّ إحداثيات  $K$  من الصيغة  $(2, 3, z)$ .

③ لدينا

$$MK^2 = (4-2)^2 + (-4)^2 + (2-z)^2 = (z-2)^2 + 20$$

④ أصغر قيمة للمسافة  $MK$  هي  $2\sqrt{5}$  و يبلغها عندما عندما  $z = 2$  . وعليه بعد  $M$  عن المستقيم  $(AB)$  يساوي  $d = 2\sqrt{5}$  .

## 20 المسافات وحجم هرم



$n$  و  $m$  عدنان حقيقيان موجبان يُحَقَّقان  $n > m > 0$  . نتأمل النقاط  $N(0,0,n)$  و  $M(0,6,m)$  و  $B(0,6,0)$  و  $A(\sqrt{3},3,0)$  في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  . عيّن  $m$  و  $n$  ليكون المثلث  $MAN$  قائماً في  $A$  وحجم الجسم  $AOBMN$  يساوي  $5\sqrt{3}$  .

### الحل

لنحسب أطوال أضلاع المثلث  $NAM$  . لدينا

$$NA^2 = 3 + 9 + n^2 = n^2 + 12$$

$$MA^2 = 3 + 9 + m^2 = m^2 + 12$$

$$NM^2 = 0 + 36 + (m - n)^2 = 36 + (m - n)^2$$

يكون المثلث  $NAM$  قائماً في  $A$  ، إذا تحقق الشرط  $NM^2 = NA^2 + MA^2$  وهذا يكافئ:

$$m \cdot n = 6 \quad \text{①}$$

ولما كان حجم الهرم يساوي  $5\sqrt{3}$  فإن  $5\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot S(OBMN) \cdot h$  ولكن

$$S(OBMN) = \frac{m + n}{2} \cdot 6 = 3(m + n)$$

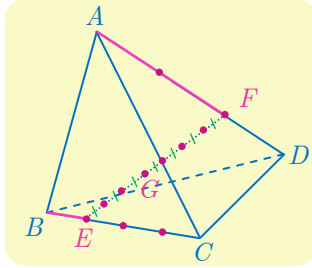
$$\text{ومنه } 5\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 3(m + n) \cdot \sqrt{3}$$

$$m + n = 5 \quad \text{②}$$

ويحل ① و ② حلاً مشتركاً نجد  $m = 2$  و  $n = 3$  .

- 21 نتأمل رباعي وجوه  $ABCD$ ، ونقطتين  $E$  و  $F$  معرفتين وفق  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .  
 أثبت أنّ  $G$ ، مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,3)$  و  $(C,1)$  و  $(D,2)$ ، يقع على  $[EF]$ .  
 ثمّ عيّن النقطة  $G$  على  $[EF]$ .

الحل



- إنّ  $E$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B,3)$  و  $(C,1)$  لأنّ  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$  و  $F$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(D,2)$  لأنّ  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .  
 إذن  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(E,4)$  و  $(F,3)$ ، ومنه  $G$  يقع على  $(EF)$  و  $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$ .

- 22 نتأمل رباعي وجوه  $ABCD$ ، ونقطتين  $I$  و  $J$  معرفتين وفق  $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$  و  $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$ .

① أيمن أن تتطبق إحدى النقطتين  $I$  و  $J$  على الأخرى؟

② أثبت أنه، أيّاً كانت النقطة  $M$  من الفراغ، كان :

$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

③ جد مجموعة نقاط الفراغ  $M$  التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

الحل

- ① لدينا  $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$  ومنه  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IB}$  أي  $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA}$ ، وبطريقة مماثلة نجد أن  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{JD}$ .  
 لو افترضنا أنّ  $I = J$  استنتجنا أنّ  $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA}$  و  $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CD}$ ، وبالجمع نجد  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ ،  
 أو  $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$  وأخيراً  $2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}$ . إذن تقع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  في مستو واحد وهذا خُلفٌ. وعليه لا يمكن أن تتطبق النقطتان  $I$  و  $J$ .

- ② لما كانت  $B$  منتصف  $[IA]$  كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتقلبتين  $(I,1)$  و  $(A,1)$  ومنه  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MB}$  إذن  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$ ، وكذلك  $D$  هي منتصف  $[JC]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتقلبتين  $(C,1)$  و  $(J,1)$  ومنه  $\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$  إذن  $\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MC}$ .  
 ③ لدينا  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$  حيث  $G$  مركز ثقل المثلث  $BCD$ . إذن

$$3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 3\vec{MA} - 3\vec{MG} = 3\vec{GA}$$

ومنه، الشرط

$$\|\vec{MA} + \vec{MC} + \vec{MB}\| = \|\vec{3MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\|$$

يكافئ  $\|\vec{3MG}\| = \|\vec{3GA}\|$  أي  $\|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\|$  ومنه تحقق  $M$  الشرط المعطى إذا فقط إذا انتمت إلى الكرة التي مركزها  $G$  ونصف قطرها  $\|\vec{GA}\|$ .

**23** لدينا في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطتان  $A(2, -1, 2)$  و  $B(-2, 1, -2)$ . نقرن بكل نقطة

$$f(M) = MA^2 + MB^2 \text{ المقدار، من الفراغ، المقدار } M(x, y, z)$$

① احسب  $f(M)$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $z$ .

② أثبت أن مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق  $f(M) = 18$  مؤلفة من نقطة واحدة.

③ أثبت أن مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق  $f(M) = 30$  كرة مركزها  $O$ . أوجد نصف قطرها.

④ أثبت أنه، وفق شرط على العدد الحقيقي  $k$ ، مجموعة النقاط  $M$  المحققة للعلاقة  $f(M) = k$

هي كرة مركزها  $O$ .

**الحل**

① لدينا  $MA^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2$  و  $MB^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2$

$$\text{ومنه } f(M) = MA^2 + MB^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18$$

②  $f(M) = 18$  إذا فقط إذا كان  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  أي  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

③  $f(M) = 30$  إذا فقط إذا كان  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  أي إذا فقط إذا انتمت  $M$  إلى الكرة التي

مركزها  $O$  ونصف قطرها  $\sqrt{6}$ .

④  $f(M) = k$  إذا فقط إذا كان  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(k - 18)$  ومنه عندما  $k > 18$  نجد أن

مجموعة النقاط  $M$  المحققة للعلاقة  $f(M) = k$  هي كرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $\sqrt{\frac{1}{2}(k - 18)}$ .

نتأمل رباعي الوجوه  $ABCD$ .

**24**

①  $M$  نقطة من الحرف  $[AC]$ . جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة  $M$  موازياً

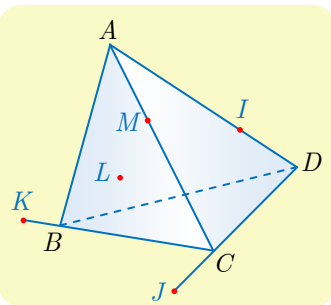
للمستوي  $(BCD)$ .

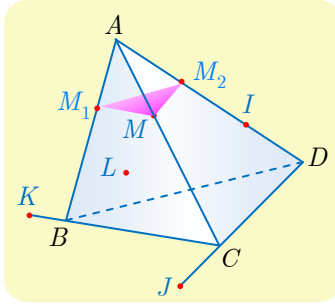
②  $I$  نقطة من الحرف  $[AD]$ ، و  $J$  نقطة من المستقيم  $(CD)$ ، و  $K$  نقطة

من المستقيم  $(BC)$ . عيّن مقطع رباعي الوجوه بالمستوي  $(IJK)$ .

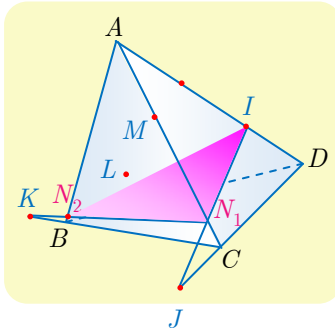
③  $L$  نقطة من المستوي  $(ABD)$ . أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي

$(KJL)$ .





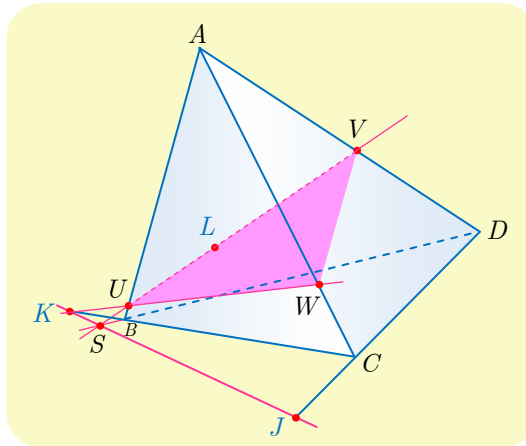
① ليكن  $P$  المستوي المار بالنقطة  $M$  موازياً للمستوي  $(BCD)$  فيكون الفصل المشترك للمستويين  $P$  و  $(ACD)$  موازياً للمستقيم  $(CD)$  وكذلك يكون المشترك للمستويين  $P$  و  $(ABC)$  موازياً للمستقيم  $(BC)$ . ننشئ من  $M$  مستقيمين  $(MM_1)$  يوازي  $(BC)$  و  $(MM_2)$  يوازي  $(CD)$  فيكون  $P$  المستوي الذي يعينه المستقيمان المتقاطعان  $(MM_1)$  و  $(MM_2)$ . والمقطع المطلوب هو المثلث  $MM_1M_2$ .



② ليكن  $Q$  المستوي  $(IJK)$ . النقطة  $I$  تنتمي إلى المستقيم  $(AD)$  المحتوى في المستوي  $(ACD)$ ، والنقطة  $J$  تنتمي إلى المستقيم  $(CD)$  المحتوى في المستوي  $(ACD)$ ، إذن المستقيم  $(IJ)$  محتوى في  $(ACD)$ ، وهو، وضوحاً، محتوى في  $Q$ . إذن  $(IJ)$  هو الفصل المشترك للمستويين  $(ACD)$  و  $Q$ .

المستقيم  $(IJ)$  يقطع  $(AC)$  في  $N_1$ . ونجد بالمماثلة أن  $(KN_1)$  هو الفصل المشترك للمستويين  $(ABC)$  و  $Q$ . وهذا الفصل المشترك يقطع  $(AB)$  في  $N_2$ . وهكذا يكون مقطع رباعي الوجوه مع  $Q$  هو المثلث  $(IN_1N_2)$ .

③ ليكن  $R$  المستوي  $(LKJ)$ .



- لتكن  $S$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(BD)$  و  $(KJ)$  من المستوي  $(BCD)$ . النقطة  $S$  تنتمي إلى  $(JK)$  المحتوى في  $R$ ، و  $S$  تنتمي إلى  $(BD)$  المحتوى في  $(ABD)$ . وكذلك تنتمي  $L$  إلى كل من  $R$  و  $(ABD)$ . فالمستقيم  $(SL)$  هو الفصل المشترك للمستويين  $R$  و  $(ABD)$ .
- المستقيم  $(SL)$  يقطع  $(AB)$  و  $(AD)$  في  $U$  و  $V$  بالترتيب.
- المستقيم  $(KU)$  هو الفصل المشترك للمستويين  $R$  و  $(ABC)$ ، وهو يقطع  $(AC)$  في  $W$ .
- المثلث  $UVW$  هو مقطع  $R$  ورباعي الوجوه  $ABCD$ .

نتأمل مكعباً  $ABCDEFGH$ ، والنقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  منتصفات  $[AE]$  و  $[BG]$  و  $[EG]$  و  $[AB]$  بالترتيب. والنقطة  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,1)$  و  $(G,1)$  و  $(E,1)$ .

- ① أثبت أن  $M$  تنتمي إلى  $[IJ]$  وعيّن موضعها على هذه القطعة.
- ② أثبت أن  $M$  تنتمي إلى  $[KL]$  وعيّن موضعها على هذه القطعة.
- ③ استنتج أن  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  تقع في مستوٍ واحد وعيّن طبيعة الرباعي  $ILJK$ .

### الحل

①  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة  $(A,1)$  و  $(B,1)$  و  $(G,1)$  و  $(E,1)$  ولأن  $I$  منتصف  $[AE]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(A,1)$  و  $(E,1)$ ، و  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(B,1)$  و  $(G,1)$ ، فتكون  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(I,2)$  و  $(J,2)$  إذن  $M$  منتصف  $[IJ]$ .

② لأن  $K$  منتصف  $[BG]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(B,1)$  و  $(G,1)$ ، و  $L$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(A,1)$  و  $(B,1)$ ، ومنه  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(K,2)$  و  $(J,2)$  إذن  $M$  منتصف  $[KL]$ .

③ ومنه يتلاقى المستقيمان  $(IJ)$  و  $(KL)$  في  $M$  فالنقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  تقع في مستوٍ واحد، والشكل  $ILJK$  متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان.

# 2

## المجاء السلمي في الفراغ

1 المجاء السلمي في المستوي (تذكرة)

2 المجاء السلمي في الفراغ

3 التعامد في الفراغ

4 المعادلة الديكارتية لمستو

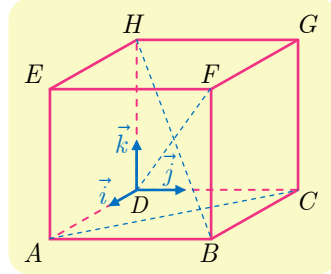
## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الجداء السلمي، وصيغته المختلفة، في المستوي وفي الفراغ.
- استعمال الجداء السلمي في إثبات التعامد.
- الشعاع الناظم على مستو.
- المعادلة الديكارتية لمستو.



## انطلاقة نشطة

الحساب في المكعب. نهدف إلى التعبير بصيغة تحليلية عن التعامد في الفراغ. لنتأمل مكعباً  $ABCDEFGH$  طول ضلعه يساوي 3. ولنتأمل المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المشار إليه في الشكل.



- ① اكتب إحداثيات جميع رؤوس المكعب.
- ② a. علّل تعامد المستقيمين  $(AB)$  و  $(FG)$ .  
b. عيّن مركبات الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{FG}$   $(x, y, z)$  و  $(x', y', z')$  مركبات الشعاع  $\overrightarrow{FG}$ .  
c. احسب المقدار  $xx' + yy' + zz'$ .
- ③ a. علّل تعامد المستقيمين  $(AC)$  و  $(BF)$ .  
b. عيّن مركبات الشعاع  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{BF}$   $(x, y, z)$  و  $(x', y', z')$  مركبات الشعاع  $\overrightarrow{BF}$ .  
c. احسب المقدار  $xx' + yy' + zz'$ .
- ④ a. ارسم الرباعي  $DBFH$  بالأبعاد الحقيقية. أياكون المستقيمان  $(DF)$  و  $(HB)$  متعامدين؟  
b. عيّن مركبات الشعاع  $\overrightarrow{DF}$  و  $\overrightarrow{HB}$   $(x, y, z)$  و  $(x', y', z')$  مركبات الشعاع  $\overrightarrow{HB}$ .  
c. احسب المقدار  $xx' + yy' + zz'$ .
- ⑤ a. ليكن  $I$  مركز الوجه  $EFGH$ . ما إحداثيات  $I$ ؟  
b. لتكن  $(x, y, z)$  مركبات الشعاع  $\overrightarrow{DF}$  المحسوبة سابقاً، احسب مركبات الشعاع  $\overrightarrow{BI}$ .  
c. احسب المقدار  $xx' + yy' + zz'$ ، ماذا تقترح؟
- ⑥ a. وضح  $I$  على الشكل المرسوم في ④ a.  
b. لإثبات تعامد  $(BI)$  و  $(DF)$ ، تؤول المسألة إلى مسألة في المستوي. باختيار معلم متجانس في المستوي  $(DBF)$ ، أعط إحداثيات نقاط الشكل، واحسب الجداء السلمي  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DF}$ ، ماذا تستنتج؟

الحل

① إحداثيات رؤوس المكعب :

$$D(0,0,0), A(3,0,0), B(3,3,0), C(0,3,0)$$

$$H(0,0,3), E(3,0,3), F(3,3,3), G(0,3,3)$$

2. a. لأنّ الجسم مكعب، استنتجنا مباشرة أنّ الحرف  $FG$  عمودي على الوجه  $(ABFE)$ ، ومنه  
 $(FG) \perp (AB)$

b.  $\overrightarrow{AB}(0,3,0)$  و  $\overrightarrow{FG}(-3,0,0)$

c.  $xx' + yy' + zz' = (0)(-3) + (3)(0) + (0)(0) = 0$

3. a.  $\left. \begin{array}{l} AB \perp BF \\ BC \perp BF \end{array} \right\}$  إذن  $(BF) \perp (ABCD)$ ، وومن ثمّ  $(AC) \perp (BF)$

b.  $\overrightarrow{AC}(-3,3,0)$  و  $\overrightarrow{BF}(0,0,3)$

c.  $xx' + yy' + zz' = (-3)(0) + (3)(0) + (0)(3) = 0$

4. a. الرباعي  $DBFH$  مستطيل فقطراه  $[BH]$  و  $[DF]$  غير متعامدين.

b.  $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$  و  $\overrightarrow{HB}(3,3,-3)$

c.  $xx' + yy' + zz' = (3)(3) + (3)(3) + (3)(-3) = 9$

5. a. مركز الوجه  $EFGH$  منتصف  $[FH]$ ، وبالتالي  $I(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$

b.  $\overrightarrow{BI}(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3)$  و  $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$

c.  $xx' + yy' + zz' = (3)(-\frac{3}{2}) + (3)(-\frac{3}{2}) + (3)(3) = 0$

6. a. الرسم مبين في الشكل المجاور.

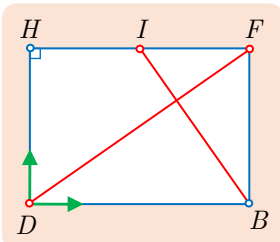
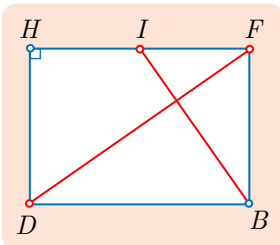
b. لنختار المعلم المتجانس  $(D, \vec{u}, \vec{v})$  حيث

$\overrightarrow{DH} = 3\vec{v}$  و  $\overrightarrow{DB} = 3\sqrt{2}\vec{u}$

فتكون الإحداثيات النقاط المهمة في هذا المعلم هي :

$D(0,0), B(3\sqrt{2},0), I(\frac{3\sqrt{2}}{2},3), F(3\sqrt{2},3)$

إذن  $\overrightarrow{DF}(3\sqrt{2},3)$  و  $\overrightarrow{BI}(-\frac{3\sqrt{2}}{2},3)$  ومنه  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ ، فالشعاعان متعامدان.



## تَدْرِبْ صفحة 50

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

① احسب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  و  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  و  $\vec{w} \cdot \vec{u}$  في الحالتين :

①  $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j}$  و  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$  و  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

②  $\vec{w}(5,2)$  و  $\vec{v}(-\frac{1}{2},3)$  و  $\vec{u}(2,-1)$

الحل

①  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{59}{6}, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{20}{3}$

②  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{7}{2}, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 8$

② أعط في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة  $A$  والعمودي على المستقيم  $d$  :

①  $A(5,3)$  و  $d : 2x + 5y - 5 = 0$       ②  $A(-1,2)$  و  $d : x - 3y + 2 = 0$

الحل

① تنتمي  $M(x,y)$  إلى  $d'$  إذا وفقط إذا كان الشعاع  $\overrightarrow{AM}$  عمودياً على  $d$  أي مرتبطاً خطياً مع الشعاع

$\vec{n}(2,5)$  الناظم على  $d$ ، وهذا يكافئ الارتباط الخطي للشعاعين  $\left[ \begin{matrix} x-5 \\ y-3 \end{matrix} \right]$  و  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right]$  أي

$$d' : 5x - 2y - 19 = 0$$

② بمثل ما سبق نجد  $d' : 3x + y + 1 = 0$

③ أثبت في حالة أربع نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  من المستوي أن:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

الحل

نستفيد من الخاصية  $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$  فنجد

$$AB^2 - BC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$$

$$CD^2 - DA^2 = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$$

وبالجمع بعد ملاحظة أن  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$  و  $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$  نجد

$$\begin{aligned} AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

④ أعط في الحالتين الآتيتين بُعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$  :

①  $A(-2,4)$  و  $d : 2x + y - 5 = 0$       ②  $A(-\sqrt{2},2)$  و  $d : \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0$

الحل

بتطبيق دستور بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي نجد :

$$\text{dist}(A, d) = \frac{|-4 + 4 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5} \quad ①$$

$$\text{dist}(A, d) = \frac{|-2 - 6 - 1|}{\sqrt{2 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{11}} \quad ②$$

## تَدْرِبْ صفحة 53

① تُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . احسب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  و  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  و  $\vec{w} \cdot \vec{u}$  في الحالتين :

①  $\vec{u}(1 + \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$  و  $\vec{v}(1 - \sqrt{2}, 0, -1)$  و  $\vec{w}(0, -\sqrt{3}, 1)$

②  $\vec{u}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$  و  $\vec{v}(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{3})$  و  $\vec{w}(1, 0, 1)$

الحل

نطبق عبارة الجداء السلمي في الفراغ :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{7}{6} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{7}{6} \end{array} \right\} \quad ② \quad \left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = -1 \\ \vec{w} \cdot \vec{u} = -3 \end{array} \right\} \quad ①$$

② إذا علمت أن  $\vec{u}$  نظيم  $\vec{v}$  يساوي 5 ونظيم  $\vec{v}$  يساوي 3 وأن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$  فاحسب المقادير الآتية:

①  $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$       ②  $\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

③  $(2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u})$       ④  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$

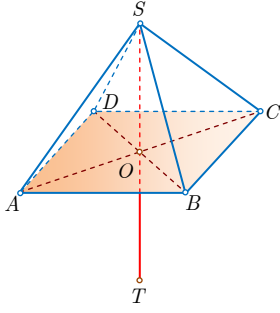
الحل

①  $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 25 - 4 = 21$

②  $\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = -4 - 9 = -13$

③  $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - 3\vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u}^2 = 2(-4) - 6(25) = -158$

④  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v}^2 = 25 - 2(-4) - 3(9) = 6$



③ نتأمل هرمًا  $S-ABCD$  قاعدته مَرَبَع ورأسه  $S$ . وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي  $a$ . احسب  $\vec{SA} \cdot \vec{AC}$  و  $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$  و  $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$ .

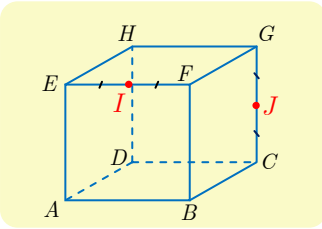
الحل

الهرم منتظم وأطوال جميع أحرفه وأحرف قاعدته  $a$ ، نلاحظ أولاً أن  $SAB$  متساوي الأضلاع، وأن  $SAC$  قائم الزاوية في  $S$  ومتساوي الساقين لأنه طبق على  $BAC$  إذن

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SB}\| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SC} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SC}\| \cdot \cos(\angle SAC) = 0$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{AC} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos(\angle SAC) = a \times \sqrt{2}a \times \cos \frac{3\pi}{4} = -a^2$$



④  $ABCDEFGH$  مكعب طول ضلعه  $a$ . فيه  $I$  منتصف  $[EF]$  و  $J$

منتصف  $[CG]$ . احسب  $\vec{EI} \cdot \vec{EA}$  و  $\vec{EI} \cdot \vec{FC}$  و  $\vec{EI} \cdot \vec{GJ}$  و  $\vec{EI} \cdot \vec{IA}$  و  $\vec{JH} \cdot \vec{JD}$ .

الحل

$$\vec{EI} \cdot \vec{EA} = 0, \vec{EI} \cdot \vec{FC} = 0, \vec{EI} \cdot \vec{GJ} = 0,$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{IA} = \vec{EI} \cdot \vec{IE} = -EI^2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \vec{JH} \cdot \vec{JD} &= (\vec{JG} + \vec{GH}) \cdot (\vec{JC} + \vec{CD}) = \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD} \\ &= -\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + a^2 = \frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

## تَدْرِبْ صفحة 56

نُعْطِي فِي هَذِهِ الْفَقْرَةَ مَعْلَمًا مِتْجَانَسًا  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

① بَيِّنْ فِيمَا يَأْتِي بَيِّنْ إِذَا كَانَ الشَّعَاعَانِ  $\vec{u}$  وَ  $\vec{v}$  مِتْعَامِدِينَ أَوْ عَيْنَ الْوَسِيطِ  $\alpha$  لِيَكُونَا كَذَلِكَ.

$$\vec{v} \left( -\frac{2}{5}, 2, 3 \right), \quad \vec{u} \left( \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad ①$$

$$\vec{v} \left( -\sqrt{2}, 1, 1 \right), \quad \vec{u} \left( \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \right) \quad ②$$

$$\vec{v} \left( -\frac{2}{5}, 3, \alpha \right), \quad \vec{u} \left( 2, -\frac{1}{2}, 5 \right) \quad ③$$

$$\vec{v} \left( \alpha, 2\alpha, \frac{1}{2} \right), \quad \vec{u} \left( \sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2 \right) \quad ④$$

الحل

①  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \neq 0$  فالشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ليسا متعامدين.

②  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  فالشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان.

$$\alpha = \frac{23}{50} \text{ إذا فقط إذا كان } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{23}{10} + 5\alpha \quad \textcircled{3}$$

$$\alpha = \frac{-3}{3\sqrt{3} + 2} \text{ إذا فقط إذا كان } \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)\alpha + 1 \quad \textcircled{4}$$

② نتأمل النقطتين  $A(2, -5, 1)$  و  $B(0, 2, 6)$ . والمستقيم  $d$  المار بالنقطة  $C(-2, 3, 1)$  وشعاع توجيهه  $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ . أثبت أن  $d$  عمودي على المستقيم  $(AB)$ .

الحل

يتعامد المستقيم  $d$  مع المستقيم  $(AB)$  إذا فقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ . في حالتنا  $\overrightarrow{AB}(-2, 7, 5)$  و  $\vec{u}(-4, 1, -3)$  وبالتالي  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 + 7 - 15 = 0$  فالمستقيمان  $(AB)$  و  $d$  متعامدان.

③ أطوال الأشعة  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{u} + \vec{v}$  هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أياكون الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدين؟

الحل هنا  $\vec{u} \perp \vec{v}$  لأن

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(100 - 36 - 64) = 0$$

④ نتأمل شعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$ ، ونفترض أن  $\vec{u} + \vec{v}$  و  $\vec{u} - \vec{v}$  متعامدان. أثبت أن للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  الطول نفسه.

الحل من الفرض لدينا  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 0$  ومنه  $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$  أي  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ .

## تَدْرِبْ صفحة 59

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

① في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة  $A$  ويقبل الشعاع  $\vec{n}$  شعاعاً ناظماً:

$$\vec{n}(2, -3, -1), \quad A(\sqrt{2}, -2, 5) \quad \textcircled{2} \quad \vec{n}(1, -1, 0), \quad A(1, 0, 5) \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n}(\sqrt{3}, 2, 0), \quad A(0, -3, 0) \quad \textcircled{4} \quad \vec{n}\left(\frac{2}{3}, 4, -1\right), \quad A\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right) \quad \textcircled{3}$$

الحل

إذا كان الشعاع  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظماً على المستوي المار بالنقطة  $A(x_0, y_0, z_0)$ ، فإن معادلة المستوي

$$\text{هي : } a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$x - y = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$2x - 3y - z = 2\sqrt{2} + 1 \quad \textcircled{2}$$

$$2x + 12y - 3z = 40 \quad \textcircled{3}$$

$$\sqrt{3}x + 2y = -6 \quad \textcircled{4}$$

- ② في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي  $Q$  المار بالنقطة  $A$  موازياً للمستوي  $P$ :
- ①  $P : 2x - y + 3z = 4, A(1,0,1)$   
 ②  $P : z = 2, A(0,0,0)$   
 ③  $P : x + y = 5, A(0,3,0)$   
 ④  $P : 5x - 3y + 4z = 8, A(-1,2,-3)$

الحل

معادلة أي مستوي  $Q$  يوازي  $P : ax + by + cz + d = 0$  هي من الصيغة:

$$ax + by + cz + e = 0$$

فنعين  $e$  من شرط المرور بالنقطة  $A$ . وهكذا نجد:

- ①  $Q : 2x - y + 3z = 5,$   
 ②  $Q : z = 0,$   
 ③  $Q : x + y = 3,$   
 ④  $Q : 5x - 3y + 4z = -23,$

③ ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$R : 2x - 3y + 5z + 4 = 0 \text{ و } Q : 6x - 11y - 9z - 5 = 0 \text{ و } P : 7x + 3y - z - 1 = 0$$

الحل

يتعامد مستويان إذا تعامد شعاع ناظم على الأول مع شعاع ناظم على الثاني: نعين أشعة ناظمة:

$$\vec{n}_P(7,3,-1), \quad \vec{n}_Q(6,-11,-9), \quad \vec{n}_R(2,-3,5)$$

ونرى أنّ  $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 18 \neq 0$  فالمستويان  $P$  و  $Q$  غير متعامدين. و  $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = 0$  و  $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 0$  إذن  $Q \perp R$  و  $P \perp R$ .

④ في كل من الحالات الآتية بين إذا كان المستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعين.

- ①  $P : x - y + z = 0, \quad Q : x - y + z - 3 = 0$   
 ②  $P : 2x + y + 5 = 0, \quad Q : 4x + 2y + z + 5 = 0$

الحل

يتوازي مستويان إذا كان شعاع ناظم على أحدهما شعاعاً ناظماً على الآخر أيضاً، وفي غير هذه الحالة يكونان متقاطعين.

- ① هنا  $\vec{n}_P(1,-1,1), \vec{n}_Q(1,-1,1)$  فالشعاعان الناظران مرتبطان خطياً، والمستويان متوازيان وغير منطبقين لأن  $P$  يمر بالمبدأ ولا يفعل ذلك  $Q$ .
- ② هنا  $\vec{n}_P(4,2,1), \vec{n}_Q(2,1,0)$  فالشعاعان الناظران غير مرتبطين خطياً، والمستويان متقاطعان.

⑤ احسب بُعد النقطة  $A(5,-3,4)$  عن المستوي  $P : 2x - y + 3z - 5 = 0$ . وكذلك احسب بُعد النقطة

$$Q : y - z = 0 \text{ عن المستوي } B(2,2,5)$$

هذا تطبيق مباشر لدستور المسافة:

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|2(5) - (3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

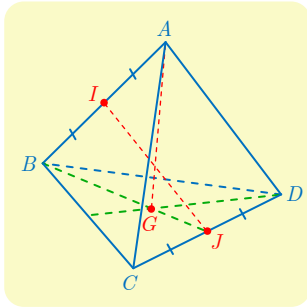
$$\text{dist}(B, \mathcal{Q}) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

## أنشطة

### نشاط 1 خواص رباعي الوجوه المنتظم

رباعي الوجوه المنتظم هو مجسم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. نسمي حرفين متقابلين كل حرفين لا يشتركان برأس.

#### 1 خواص عامة



ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه منتظم ولنضع  $AB = a$ .

① نهدف إلى إثبات أن كل حرفين متقابلين متعامدان، وأن المستقيم الواصل

بين منتصفَي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

a. احسب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

b. أثبت تعامد المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$ .

c. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين  $(AC)$  و  $(BD)$  والمستقيمين  $(AD)$  و  $(BC)$ ؟

d. ليكن  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[CD]$ . تيقن أن  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ، واستنتج أن

المستقيم  $(IJ)$  عمودي على كل من المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$ .

② في رباعي الوجوه  $ABCD$ ، الارتفاع النازل من  $A$  هو المستقيم المار بالنقطة  $A$  عمودياً على المستوي  $(BCD)$ .

a. ليكن  $G$  مركز ثقل المثلث  $BCD$ . احسب  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}$  و  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ ، واستنتج أن  $(AG)$  هو الارتفاع النازل من  $A$ .

b. عيّن بقية الارتفاعات في رباعي الوجوه  $ABCD$ .

③ نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم  $ABCD$  النقطة  $O$  مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

a. أثبت أن النقاط  $A$  و  $O$  و  $G$  تقع على استقامة واحدة واحسب  $AO$  و  $AG$ .

b. أثبت أن  $O$  هو منتصف القطعة المستقيمة  $[IJ]$ .

c. احسب الأطوال  $OB$  و  $OI$ .



d. أثبت أن النقطة  $O$  متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

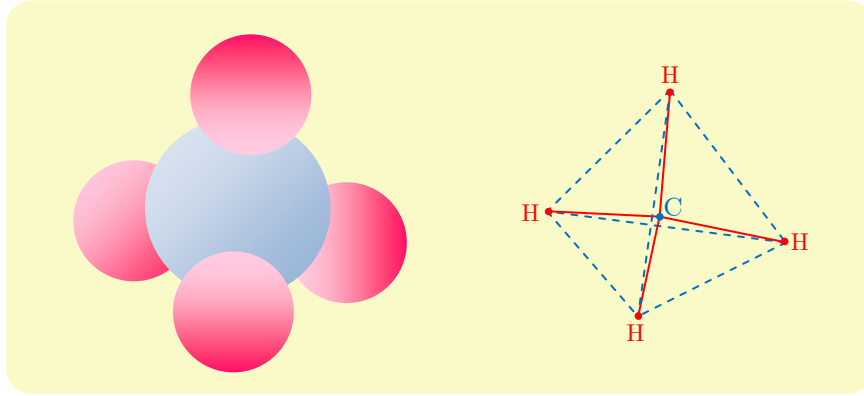
④ نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية  $\widehat{AOB}$ .

a. احسب  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  بأسلوبين أحدهما بكتابة  $(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$  و  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$

b. استنتج قيمة تقريبية للزاوية  $\widehat{AOB}$  بالدرجات. وبين أن  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$ .

## ② تطبيق في الكيمياء

نجد أدناه تمثيلاً لجزيئة الميثان. تقع نوى ذرات الهيدروجين الأربع  $H$  على رؤوس رباعي وجوه منتظم. تقع نواة ذرة الكربون  $C$  داخل رباعي الوجوه على المسافة نفسها من كل واحدة من رؤوس رباعي الوجوه أي في مركزه. لتبسيط تمثيل جزيئة الميثان، نستعمل المخطّط المبين أدناه، حيث متلنا الروابط بخطوط متصلة و حروف رباعي الوجوه بخطوط متقطّعة لتتذكّرنا. هذا المخطّط هو الصيغة الستيريوكيميائية للميثان. أتاحت قياسات تحديد طول الروابط  $C-H$  بمقدار  $1.09 \times 10^{-10} \text{ m}$ .



① أعط تقريباً لقياس الزاوية بين رابطتين من النوع  $C-H$ .

② عيّن طول حرف رباعي الوجوه أي المسافة بين ذرتي هيدروجين.

### ① خواص عامة

① a. مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه  $a$  إذن  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$  ونجد بالمثل

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$$

b. لنثبت أن  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$  نحسب الجداء السلمي فنجد:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

c. تؤدي رؤوس رباعي الوجوه المنتظم دوراً متناظراً إذن نجد بالمثل أن  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$  و  $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ .

d. في الحقيقة لدينا  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IJ}$ . فإذا استفدنا مما سبق وجدنا

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0$$

وكذلك  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$  إذن  $(IJ)$  عمودي على كل من  $(AB)$  و  $(CD)$ .

②  $a$ . لدينا :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 0 = 0 \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

إذن  $\overrightarrow{AG}$  عمودي على كل من  $\overrightarrow{BD}$  و  $\overrightarrow{CD}$ ، فالمستقيم  $(AG)$  عمودي على مستقيمين متقاطعين في

المستوي  $(CBD)$  إذن هو عمودي على  $(CBD)$ ، وعليه  $(AG)$  هو الارتفاع النازل من  $A$  في الهرم.

$b$ . نستنتج من التحليل السابق أن ارتفاعات رباعي الوجوه المنتظم هي المستقيمات التي تصل كل رأس بمركز ثقل الوجه المقابل لهذا الرأس.

③ النقطة  $O$  مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسند إليها الأمثال ذاتها :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$a$ . لأن  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,1)$  فإن النقطة  $O$  هي مركز الأبعاد

المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(G,3)$  عملاً بالخاصة التجميعية، ويكون  $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$  ومنه النقاط

$A, O, G$  تقع على استقامة واحدة.

لما كان  $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$  لأن  $G$  مركز ثقل المثل  $BCD$  استنتجنا أن

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{AG}^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = 6a^2\end{aligned}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \text{، وعليه } \overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

$b$ . لما كانت  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C,1)$  و  $(D,1)$ ، و  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A,1)$  و  $(B,1)$  وجدنا أن  $O$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I,2)$  و  $(J,2)$ . فيكون  $O$  منتصف  $[IJ]$ .

$c$ . رباعي الوجوه المنتظم متناظر بالنسبة إلى المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  إذن  $OB = OA$ .

وجدنا أن  $4\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$  وعليه

$$\begin{aligned}16\overrightarrow{IO}^2 &= (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= a^2 + 4a^2 + a^2 - 4 \times \frac{a^2}{2} + 2 \times 0 - 4 \times \frac{a^2}{2} = 2a^2\end{aligned}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{OI} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

$d$ . لأنّ رباعي الوجوه المدروس منتظم، فإنّ رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإنّ

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

④  $a$ . إن

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (\vec{OI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{OI} + \vec{IB}) \\ &= (\vec{OI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{OI} - \vec{IA}) \\ &= OI^2 - IA^2 = \frac{2a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = -\frac{2a^2}{16}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = \frac{6}{16}a^2 \cos \widehat{AOB}$$

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{-1}{3} \quad \text{إذن}$$

$b$ . تكون القيمة التقريبية للزاوية  $\angle AOB \approx 109.47^\circ$ . ومن تطابق المثلثات  $AOB, BOC, COD, AOD$

نستنتج أنّ

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD$$

## ② تطبيق في الكيمياء

$a$ . الزاوية المطلوبة تنطبق على الزاوية  $\angle AOB \approx 109.47^\circ$ .

طول الرابطة  $C-H$  يساوي الطول  $OA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$  الذي حسبناه آنفاً إذن

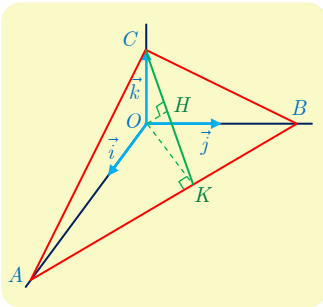
$$a = \frac{4}{\sqrt{6}} 1.09 \times 10^{-10} \approx 1.78 \times 10^{-10} \text{ m}$$

وهذا يمثل المسافة بين ذرتي هيدروجين.

## نشاط 2 استعمال معلم

### ① رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة

نتأمّل رباعي الوجوه  $OABC$  ثلاثي الزوايا القائمة رأسه  $O$ ، أي إنّ المستقيمات  $(OA)$  و  $(OB)$  و  $(OC)$  متعامدة متنى متنى. لنفترض إضافة إلى ذلك أنّ  $OC = 1$  و  $OB = 2$  و  $OA = 3$ . نرسم بالرمز  $H$  إلى المسقط القائم للنقطة  $O$  على المستوي  $(ABC)$ .



① نريد إثبات أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ . لنختار إذن معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بوضع  $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{OA}$  و  $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{OB}$  و  $\vec{k} = \vec{OC}$ .

a. احسب إحداثيات  $H$ .

b. احسب  $\vec{OC} \cdot \vec{AB}$  و  $\vec{OH} \cdot \vec{AB}$  واستنتج أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(OCH)$ .

c. احسب  $\vec{AB} \cdot \vec{CH}$  و  $\vec{AC} \cdot \vec{BH}$  واستنتج أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .

② أثبت أن المسقط القائم لكل من النقطتين  $C$  و  $O$  على المستقيم  $(AB)$  هو النقطة  $K$  ذاتها، واحسب إحداثيات  $K$ .

b. أعط تقريباً لقياس الزاوية  $\widehat{OKC}$ .

### الحل

① نريد إثبات أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات في المثلث  $ABC$

a. حساب  $(x, y, z)$  إحداثيات  $H$ . استناداً إلى الفرض  $(OH)$  عمودي على جميع مستقيمت المستوي  $ABC$ . إذن  $\vec{OH} \cdot \vec{HA} = \vec{OH} \cdot \vec{HB} = \vec{OH} \cdot \vec{HC} = 0$  ومنه

$$3x = \vec{OH} \cdot \vec{OA} = \vec{OH} \cdot (\vec{OH} + \vec{HA}) = \vec{OH}^2$$

$$2y = \vec{OH} \cdot \vec{OB} = \vec{OH} \cdot (\vec{OH} + \vec{HB}) = \vec{OH}^2$$

$$z = \vec{OH} \cdot \vec{OC} = \vec{OH} \cdot (\vec{OH} + \vec{HC}) = \vec{OH}^2$$

فإذا عرفنا  $k = \vec{OH}^2$  وهو عدد موجب تماماً كان لدينا

$$z = 2y = 3x = k$$

وكان

$$k = x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 \right)$$

إذن  $k = \frac{36}{49}$  و  $(x, y, z) = \left( \frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49} \right)$

b. لدينا  $\vec{OC}(0, 0, 1)$  و  $\vec{AB}(-3, 2, 0)$  فينتج أن  $\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$

فينتج أن  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$  و  $\vec{OH} \left( \frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49} \right)$  و  $\vec{AB}(-3, 2, 0)$

إذن المستقيم  $(AB)$  عمودي على كل من  $(OC)$  و  $(OH)$  فهو عمودي على المستوي  $(OCH)$ .

c. هنا  $\vec{CH} \left( \frac{12}{49}, \frac{18}{49}, -\frac{13}{49} \right)$  و  $\vec{AB}(-3, 2, 0)$  إذن  $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

وكذلك  $\vec{BH} \left( \frac{12}{49}, -\frac{80}{49}, \frac{36}{49} \right)$  و  $\vec{AC}(-3, 0, 1)$  إذن  $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$

نستنتج من ذلك أن  $(AB) \perp (HC)$  و  $(AC) \perp (BH)$  فالنقطة  $H$  هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث  $(ABC)$ .

② a. رأينا أنّ المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(OCH)$  لتكن  $K$  نقطة تقاطعهما. عندئذ تكون  $K$  هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي  $(OCH)$  على المستقيم  $(AB)$  وعلى الخصوص  $K$  هي المسقط القائم لكل من النقطتين  $O$  و  $C$  على  $(AB)$ .  
تتعين النقطة  $K$  بالاستفادة من خاصيتين :

- النقاط  $A, K, B$  تقع على استقامة واحدة. إذن يوجد ثابت  $t$  يحقق  $\overrightarrow{AK} = t\overrightarrow{AB}$ .
  - الشعاعان  $\overrightarrow{OK}$  و  $\overrightarrow{AB}$  متعامدان إذن  $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .
- لذلك نكتب  $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$  ونحسب

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -OA^2 + tAB^2 = -9 + t(9 + 4) = 13t - 9 \end{aligned}$$

إذن  $t = \frac{9}{13}$  و المساواة  $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$  تعطينا إحداثيات  $K$

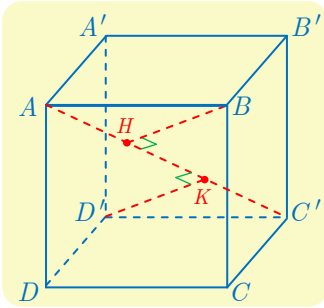
$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{9}{13} \begin{bmatrix} 0 - 3 \\ 2 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/13 \\ 18/13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو  $K\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$ .

② b. ومنه نستنتج أنّ  $OK = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2} = \left(\frac{6}{13}\right)\sqrt{4 + 9} = \frac{6}{\sqrt{13}}$  ومن ثمّ لأنّ المثلث  $KOC$

قائم في  $O$  نجد  $\tan \widehat{OKC} = \frac{OC}{OK} = \frac{\sqrt{13}}{6}$  ونجد باستعمال الآلة الحاسبة  $\widehat{OKC} \approx 31^\circ$ .

## ② بعض خواص المكعب



ليكن  $ABCDA'B'C'D'$  مكعباً طول حرفه  $a$ . النقطة  $H$  هي المسقط القائم للرأس  $B$  على المستقيم  $(AC')$ . نريد إثبات أنّ النقطة  $H$  هي أيضاً المسقط القائم لكلّ من  $A'$  و  $D$  على المستقيم  $(AC')$ .

سنستعمل المعلم المتجانس  $(D'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  حيث

$$\overrightarrow{D'D} = a\vec{i} \text{ و } \overrightarrow{D'C'} = a\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{D'A'} = a\vec{k}$$

① اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

② لحساب  $(x, y, z)$  إحداثيات النقطة  $H$ :

a. اكتب بدءاً من المساواة  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$ ، علاقة بين  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $a$ .

b. اكتب علاقة بين  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $a$  و  $\lambda$  حيث  $\lambda$  معرفة بالعلاقة  $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC'}$ . واستنتج قيمة  $\lambda$  ثمّ احداثيات  $H$ .

- ③ لإثبات أنّ المسقط القائم للنقطة  $A'$  على  $(AC')$  هي النقطة  $H$  ذاتها، يكفي أن نثبت أنّ  $(A'H)$  عمودي على  $(AC')$ . أثبتت تعامد الشعاعين  $\overrightarrow{AC'}$  و  $\overrightarrow{A'H}$ .
- ④ أثبت أنّ المسقط القائم للنقطة  $D$  على  $(AC')$  هي النقطة  $H$  ذاتها.
- ⑤ لتكن  $K$  المسقط القائم للنقطة  $D'$  على  $(AC')$ .
- a. ماذا تقول عن الطول  $C'K$  ؟
- b. حدّد موقع  $K$  على المستقيم  $(AC')$ .
- c. ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على  $(AC')$  هي النقطة  $K$  ذاتها.

### الحل

- ① المعلم المفترض  $(D'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متجانس. إحداثيات رؤوس المكعب في هذا المعلم
- $$D'(0,0,0), D(a,0,0), C(a,a,0), C'(0,a,0)$$
- $$A'(0,0,a), A(a,0,a), B(a,a,a), B'(0,a,a)$$
- ② a. لدينا  $\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$  و  $\overrightarrow{BH}(x-a, y-a, z-a)$  والشرط  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$  يكافئ :
- $$x - y + z - a = 0 \quad (*)$$
- b. من الفرض لدينا  $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC'}$  ومنه  $\overrightarrow{AH}(x-a, y, z-a) = \lambda(-a, a, -a)$
- $$z = a - \lambda a, \quad y = \lambda a, \quad x = a - \lambda a$$
- نعوض في العلاقة (\*) فنجد  $-3a\lambda = -a$  ومنه  $\lambda = \frac{1}{3}$ ، ينتج إحداثيات  $H(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$ .
- ③ لدينا  $\overrightarrow{A'H}(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, -\frac{1}{3}a)$ ،  $\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$  إذن  $\overrightarrow{A'H} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$  ومنه  $\overrightarrow{A'H} \perp \overrightarrow{AC'}$ ،
- فالمستقيمان  $(A'H)$  و  $(AC')$  متعامدان. إذن  $H$  هي المسقط القائم للنقطة  $A'$  على  $(AC')$
- ④ لدينا  $\overrightarrow{DH}(-\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$ ،  $\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$  إذن  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$  ومنه  $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC'}$ ، فالمستقيمان  $(DH)$  و  $(AC')$  متعامدان. إذن  $H$  هي المسقط القائم للنقطة  $D$  على  $(AC')$ .
- ⑤ مركز المكعب  $O$  هو مركز تناظر للشكل، والتناظر المركزي  $S_O$  يحافظ على المسافات والتعامد. لَمَّا كان  $S_O(B) = D'$  و  $S_O(A) = C'$  كان  $S_O(H) = K$ . نستنتج أنّ  $AH = KC'$ ، ولأنّ  $O(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$  استنتجنا إحداثيات النقطة  $K$  من كون  $O$  منتصف  $KH$ :  $K(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a)$ . بسبب التناظر نجد أنّ  $K$  هي أيضاً مسقط النقطتين  $B'$  و  $C'$  على  $(AC')$ .

## تمارين ومسابقات

1 تُعطى معلماً متجانساً في المستوي.

① يبين أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$$\vec{s}(2, -\frac{4}{5}) \text{ و } \vec{t}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}) \text{ و } \vec{w}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) \text{ و } \vec{v}(-2, -5) \text{ و } \vec{u}(2, 5)$$

② في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة  $[AB]$ :

$$B(-1, 2), \quad A(4, 1) \quad \text{①}$$

$$B(-2, \frac{1}{3}), \quad A(-5, 3) \quad \text{②}$$

③ نتأمل النقاط  $A(-5, 2)$  و  $B(1, -1)$  و  $C(-3, 3)$  و  $E(-\frac{9}{4}, -1)$ . أتكون النقطة  $E$  متساوية البعد

عن المستقيمت التي تؤلفها أضلاع المثلث  $ABC$ ؟

الحل

① نلاحظ أولاً أنّ  $\vec{v} = -\vec{u}$  و  $\vec{t} = -\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{s}$  ولأنّ  $\vec{t} \cdot \vec{v} = 0$ ، نرى أنّ أي شعاع من بين  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  عمودي على أي شعاع من بين  $\{\vec{t}, \vec{w}, \vec{s}\}$  وهناك ستة أزواج.

② محور القطعة المستقيمة هو العمود المقام على القطعة من منتصفها، وهو أيضاً مجموعة النقاط المتساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة.

① هنا  $\vec{AB}(-5, 1)$  شعاع ناظم على المحور، والنقطة  $N(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  هي منتصف  $[AB]$  فتكون معادلة المحور:  $-5x + y + 6 = 0$ .

② إذا كانت  $M(x, y)$  نقطة من محور  $[AB]$  حيث  $A(-5, 3), B(-2, \frac{1}{3})$  كان  $AM = BM$  ومنه:

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - \frac{1}{3})^2$$

وبإصلاح المساواة نجد معادلة المحور  $54x - 48y + 269 = 0$ .

③ معادلة المستقيم  $(AB)$ :  $m_{AB} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$  وهو يمر بالنقطة  $B$  إذن  $x + 2y + 1 = 0$ ، ومنه

$$L_1 = \frac{|-\frac{9}{4} - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{13}{4\sqrt{5}} \text{ يساوي عن المستقيم } (AB) \text{ النقطة } E$$

معادلة المستقيم  $(AC)$ :  $m_{AC} = \frac{1}{2}$  وهو يمر بالنقطة  $C$  إذن  $x - 2y + 9 = 0$ ، ومنه بُعد النقطة  $E$

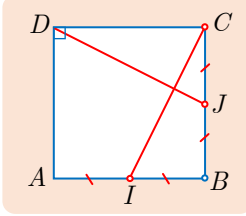
$$L_2 = \frac{|-\frac{9}{4} + 2 + 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{35}{4\sqrt{5}} \text{ يساوي عن المستقيم } (AC)$$

نلاحظ أنّ  $L_1 \neq L_2$  فالنقطة  $E$  غير متساوية البعد عن المستقيمت المارة بأزواج من النقاط  $A, B, C$ .

2

متعامدان.  $ABCD$  مربع.  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[BC]$ . أثبت أن المستقيمين  $(CI)$  و  $(DJ)$

الحل



طريقة أولى. نأخذ معلماً متجانساً  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ . فتكون إحداثيات النقاط في هذا المعلم :

$$I\left(\frac{1}{2}, 0\right), C(1, 1), D(0, 1), J\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{IC}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{DJ}\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

وبحساب الجداء السلمي :  $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  نستنتج أن الشعاعين متعامدان.

طريقة ثانية.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CD}^2) = 0 \end{aligned}$$

3

نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ.

① بيّن في كل من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان  $\vec{v}$  و  $\vec{u}$  متعامدين:

$$\vec{v}\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right), \quad \vec{u}(1, -2, 5) \quad ①$$

$$\vec{v}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1), \quad \vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0) \quad ②$$

② نتأمل النقاط  $A(4, 1, -2)$  و  $B(-1, 2, 4)$  و  $C(0, 2, -5)$  و  $D(1, -2, -\frac{7}{2})$ . ونعرّف  $M$  منتصف

القطعة المستقيمة  $[AB]$ . احسب

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

③ بيّن في كلّ من الحالات الآتية إذا كان المستويان  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{Q}$  متعامدين:

$$\mathcal{Q} : x + 2y + z - 3 = 0, \quad \mathcal{P} : x + 2y - 5z + 7 = 0 \quad ①$$

$$\mathcal{Q} : y - 2z + 3 = 0, \quad \mathcal{P} : x - 3y + 2 = 0 \quad ②$$

④ احسب في كلّ من الحالتين الآتيتين بُعد النقطة  $A$  عن المستوي  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} : x + y - 2z + 4 = 0, \quad A(0, \sqrt{2}, 1) \quad ①$$

$$\mathcal{P} : 3x + y - \frac{z}{2} + 7 = 0, \quad A(5, -2, 0) \quad ②$$



$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ ومنه } \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 - 5 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 + 0 \neq 0 \text{ ومنه } \vec{u}, \vec{v} \text{ غير متعامدين.} \quad \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 + 1 - 18 = 3 \quad \text{إذن } \overrightarrow{AB}(-5, 1, 6) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-4, 1, -3) \quad \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -5 - 4 + 9 = 0 \quad \text{إذن } \overrightarrow{AB}(-5, 1, 6) \text{ و } \overrightarrow{CD}(1, -4, \frac{3}{2})$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 4 - \frac{45}{2} = -\frac{21}{2} \quad \text{إذن } \overrightarrow{DB}(-2, 4, \frac{15}{2}) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-4, 1, -3)$$

إحداثيات النقطة  $M$  منتصف  $[AB]$  هي  $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$  إذن

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{-5}{2} - 2 + \frac{9}{2} = 0 \quad \text{ومنه } \overrightarrow{MB}(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 3) \text{ و } \overrightarrow{CD}(1, -4, \frac{3}{2})$$

③ يكون المستويان متعامدين إذا كان الجداء السلمي لناظميها معدوماً.

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \text{ ومنه } \vec{n}_P(1, 2, -5) \text{ و } \vec{n}_Q(1, 2, 1) \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 - 3 \neq 0 \text{ ومنه } \vec{n}_P(1, -3, 0) \text{ و } \vec{n}_Q(0, 1, -2) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{dist}(A, P) = \frac{|1(0) + 1(\sqrt{2}) - 2(1) + 4|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{4}$$

$$\text{dist}(A, P) = \frac{|3(5) + 1(-2) - \frac{1}{2}(0) + 7|}{\sqrt{9+1+\frac{1}{4}}} = \frac{40}{\sqrt{41}} \quad \textcircled{2}$$

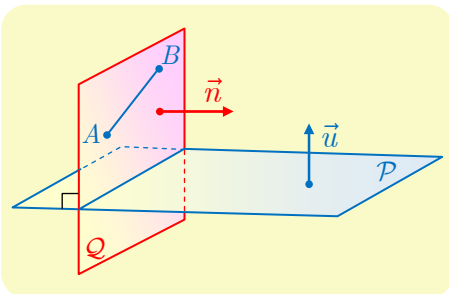


## لنتعلم البحث معاً

### 4 مسنويات متعامدة


نأمل، في المعلم المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين الآتيتين:  $A(1, -1, 2)$  و  $B(2, 0, 4)$  والمستوي  $P$  الذي معادلته  $x - y + 3z - 4 = 0$ . جد معادلةً للمستوي  $Q$  العمودي على  $P$  ويمر بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

#### نحو الحل



نريد تعيين معادلةً لمستوي  $Q$  مار بنقطة (بل اثنتين). وإذا كنا نعرف شعاعاً ناظماً  $\vec{n}(a, b, c)$  على  $Q$  استطعنا تعيين المستوي. أتوجد فرضيات في المسألة تفيد في تعيين  $\vec{n}$ ؟ المستويان  $P$  و  $Q$  متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم  $\vec{u}$  على  $P$  شعاعاً عمودياً على  $\vec{n}$ ، كما إن المستقيم  $(AB)$  محتوي في  $Q$  فالشعاع  $\overrightarrow{AB}$  عمودي أيضاً على  $\vec{n}$ .

1. أعطِ مركّبات شعاع ناظم  $\vec{u}$  على  $P$ .
2. علّل صحة المساواتين  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  و  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ .

لدينا إذن جملة المعادلتين 

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم  $a$  و  $b$  و  $c$ ، وهذا ليس مفاجئاً لأننا نعلم أنه يوجد عدد لانهائي من الأشعة النازمة على مستو. ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة  $(a, b, c)$  تحقق الجملة، يمكننا مثلاً أن

نختار قيمة إحدى المركّبات. فمثلاً لنضع  $c = 2$ .

1. أثبت في هذه الحالة أنّ  $a = -5$ ،  $b = 1$ .

2. تحقّق أنّ  $\vec{n}(-5, 1, 2)$  شعاع ناظم على  $Q$ .


3. اكتب معادلة للمستوي  $Q$ .

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة. 

### الحل

1. يمكن أن نختار  $\vec{u}(1, -1, 3)$ .

2. لما كان المستويان  $P$  و  $Q$  متعامدين، كان  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ . ولما كان  $\vec{AB}$  محتوياً في المستوي  $Q$ ، كان  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ .

من  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  نستنتج أنّ  $a - b + 3c = 0$ ، ومن  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$  نجد  $a + b + 2c = 0$ . إذن لدينا 

جملة المعادلتين:  $\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$ ، لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم  $a$  و  $b$  و  $c$ ، لهذا نختار قيمة

عددية لإحدى المركّبات لتعيين أحد الأشعة النازمة على المستوي  $Q$ ، فمثلاً في حالة  $c = 2$  تكون المعادلات الناتجة:

$$\begin{cases} a - b = -6 \\ a + b = -4 \end{cases} \quad 1.$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد:  $a = -5$  و  $b = 1$ .

2. الشعاع  $\vec{n} = (-5, 1, 2)$  شعاع ناظم على المستوي  $Q$ ، لأنه يحقق:

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = -5 + 1 + 4 = 0 \quad \text{و} \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = -5 - 1 + 6 = 0$$

3. معادلة المستوي  $Q$  هي  $-5x + y + 2z + 2 = 0$ .

## 5 بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة  $A(3, -1, 2)$ ، والمستويان  $P$  و  $Q$  :

$$P : 2x - y + z - 4 = 0$$

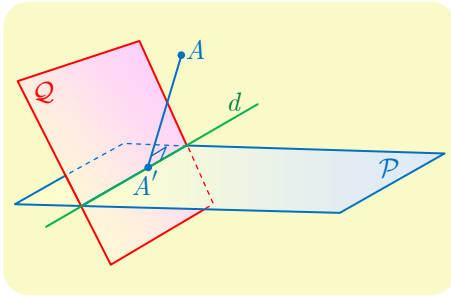
$$Q : x + y + 2z - 5 = 0$$

أثبت تقاطع المستويين  $P$  و  $Q$ ، واحسب بُعد  $A$  عن المستقيم  $d$  الذي يمثل فصلهما المشترك.

## نحو الحل

للتحقق من تقاطع المستويين  $P$  و  $Q$ ، نستعمل الأشعة النازمة على كل منهما.

1. عيّن شعاعاً ناظماً  $\vec{n}_1$  على  $P$ ، وشعاعاً ناظماً  $\vec{n}_2$  على  $Q$ .
2. استنتج أن  $P$  و  $Q$  متقاطعان.



بُعد  $A$  عن  $d$  يساوي بُعد  $A$  عن  $A'$  حيث  $A'$  هي المسقط القائم للنقطة  $A$  على  $d$ . بالطبع إذا وقعت  $A$  على  $d$  كان  $A = A'$  ومن ثم  $AA' = 0$ . تيقن أن  $A$ ، في الحقيقة، لا تقع على أي من المستويين  $P$  أو  $Q$ . إحدى الطرائق لحساب  $AA'$  تتمثل في تعيين

إحداثيات  $A'$ . تنتمي هذه النقطة إلى كل من  $P$  و  $Q$  فأحداثياتها تحقق معادلتيهما. بالإضافة إلى ما سبق المستقيم  $(AA')$  عمودي على  $d$ ، فإذا كان  $\vec{u}$  شعاعاً موجهاً للمستقيم  $d$  فإن  $A'$  هي النقطة الوحيدة من  $d$  التي تُحقق  $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$ . علينا إذن تعيين شعاع  $\vec{u}$  يوجه المستقيم  $d$ ، ولهذا نبحث عن نقطتين  $B$  و  $C$  من  $d$ .

1. تذكر أن  $M(x, y, z)$  تقع على  $d$ . إذا تحقق الشرطان

$$2x - y + z - 4 = 0 \text{ و } x + y + 2z - 5 = 0$$

2. مثلاً لتعيين نقطة  $B(x, y, z)$  من  $d$ . نختار  $x = 0$  ونعيّن  $y$  و  $z$  الموافقتين. ولتعيين  $C(x, y, z)$  من  $d$ . نختار  $x = 1$  ونعيّن  $y$  و  $z$ . وهذا يتيح لنا تعيين  $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ .
3. أثبت أن  $(a, b, c)$  إحداثيات  $A'$  تُحقق جملة المعادلات

$$\begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 & (1) \\ a + b + 2c - 5 = 0 & (2) \\ a + b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

4. استنتج من (2) و (3) أن  $3c = 5$  ثم احسب إحداثيات  $A'$ ، واستنتج المطلوب.

أنجز الحل وكتبه بلغة سليمة.

✍ لإثبات أن المستويين متقاطعان نتحقق أن ناظميهما غير مرتبطين خطياً.

1. لدينا  $\vec{n}_1 = (2, -1, 1)$  و  $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$ ، نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2. لأن الناظمين غير مرتبطين خطياً، فالمستويان متقاطعان.

✍ بافتراض أن النقطة  $A'$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على  $d$

فيكون  $AA'$  هو البعد المطلوب.

إذا وقعت النقطة  $A$  على  $d$ ، فإن  $A=A'$  ومن ثم  $AA'=0$

في الحقيقة  $A$  لا تقع على  $A'$  لأن  $A$  لا تحقق معادلة المستوي  $P$  لأن  $6+1+2-4=5 \neq 0$

وأيضاً  $A$  لا تحقق معادلة المستوي  $Q$  لأن  $3-1+4-5=1 \neq 0$

إحدى الطرائق لحساب  $AA'$  تتمثل في تعيين إحداثيات النقطة  $A'$ .

لما كانت النقطة  $A'$  تنتمي إلى  $d$ ، فهي نقطة مشتركة بين المستويين  $P$  و  $Q$ ، فإحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما. وبافتراض أن  $A'(a, b, c)$  يكون:

$$2a - b + c - 4 = 0 \quad (1)$$

$$a + b + 2c - 5 = 0 \quad (2)$$

ولدينا  $(AA')$  عمودي على  $d$ ، فإذا كان  $\vec{u}$  شعاعاً موجهاً للمستقيم  $d$ ، فإن  $A'$  هي النقطة الوحيدة من  $d$  التي تحقق  $\vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0$ . علينا تعيين شعاع  $\vec{u}$  يوجه المستقيم  $d$ ، ولهذا نبحث عن نقطتين  $B$  و  $C$  من  $d$ .

1. بافتراض  $M(x, y, z)$  تقع على  $d$  فهي تحقق معادلتين كل من المستويين  $P$  و  $Q$ :

$$x + y + 2z - 5 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + z - 4 = 0$$

2. لتعيين نقطة  $B(x, y, z)$  من  $d$  نختار قيمة لـ  $x$  ولتكن مثلاً  $x = 0$  فيصبح الشرطان المذكوران

$$-y + z - 4 = 0 \quad \text{و} \quad y + 2z - 5 = 0. \quad \text{وبالحل نجد } y = -1 \quad \text{و} \quad z = 3 \quad \text{إذن } B(0, -1, 3) \in d.$$

ولتعيين نقطة  $C(x, y, z)$  من  $d$  نختار قيمة لـ  $x$  ولتكن مثلاً  $x = 1$  فيصبح الشرطان المذكوران:

$$-y + z - 2 = 0 \quad \text{و} \quad y + 2z - 4 = 0. \quad \text{وبالحل نجد } y = 0 \quad \text{و} \quad z = 2 \quad \text{إذن } C(1, 0, 2) \in d. \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (1, 1, -1) : d \quad \text{شعاعاً موجهاً للمستقيم } d.$$

3. لدينا  $\overrightarrow{AA'} = (a - 3, b + 1, c - 2)$ ، ومن  $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$  نستنتج أن  $a + b - c = 0$ . أصبحت إحدائيات  $A'$  تحقق المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 2a - b + c = 4 & (1) \\ a + b + 2c = 5 & (2) \\ a + b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

ب طرح (3) من (2) نجد  $3c = 5$  ومنه  $c = \frac{5}{3}$  وبالتعويض في المعادلات المذكورة والحل المشترك نجد  $a = \frac{4}{3}$  و  $b = \frac{1}{3}$ . إذن  $A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ . ومنه بُعد النقطة  $A$  عن الفصل المشترك  $d$  يساوي:

$$AA' = \sqrt{\left(3 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

**طريقة ثانية.** نستنتج من المعادلتين (2) و (1) اللتين تعينان  $A'(a, b, c)$  من  $d$  أن

$$2a + c = 4 + b \quad (1)$$

$$a + 2c = 5 - b \quad (2)$$

إذن بالجمع نجد  $a + c = 3$  ومنه  $a = 1 + b$  و  $c = 2 - b$ . وهكذا نرى أن  $A'(1 + b, b, 2 - b)$  حيث  $b$  عدد حقيقي، أما مربع المسافة  $\overline{AA'}^2$  فيحسب بدلالة  $b$  كما يأتي

$$\overline{AA'}^2 = (2 - b)^2 + (1 + b)^2 + b^2 = 3b^2 - 2b + 5 = 3\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$$

إذن أقصر مسافة بين  $A$  ونقطة  $A'$  من  $d$  هي  $\sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$  وهي المسافة المطلوبة، أما النقطة  $A'$  الموافقة فنحصل عليها عندما  $b = \frac{1}{3}$  وهي إذن  $A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ .

## 6 تقاطع مستقيم ومستوي

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين  $A(2, -1, 0)$  و  $B(-1, 3, 5)$ . والمستوي  $\mathcal{P}$  الذي يقبل معادلة  $2x - 3y + z - 5 = 0$ . أثبت أن المستقيم  $(AB)$  يقطع المستوي  $\mathcal{P}$  وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

### نحو الحل

لإثبات وجود النقطة  $C$  علينا إثبات أن المستقيم  $(AB)$  لا يوازي المستوي  $\mathcal{P}$ . أعط شعاعاً موجّهاً للمستقيم  $(AB)$  وشعاعاً ناظماً على  $\mathcal{P}$ . واستنتج وجود  $C$ .

علينا إذن تعيين  $(a, b, c)$  إحداثيات النقطة  $C$ .

1. علّل وجود ثابت  $k$  يحقق  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ .

2. استنتج عبارات  $a$  و  $b$  و  $c$  بدلالة  $k$ .

3. عين  $k$  اعتماداً على وقوع  $C$  في  $\mathcal{P}$ . واستنتج إحداثيات  $C$ .

أنجز الحل وكتبه بلغة سليمة.

👉 لإثبات وجود النقطة  $C$  علينا إثبات أن المستقيم  $(AB)$  لا يوازي المستوي  $\mathcal{P}$ . ولكن  $\vec{n}(2, -3, 1)$ ، و  $\vec{AB}(-3, 4, 5)$  فنلاحظ :  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -6 - 12 + 5 = -13 \neq 0$  إذن  $\vec{n}$  ليس عمودياً على  $\vec{AB}$ . وبالتالي  $(AB)$  لا يوازي المستوي  $\mathcal{P}$ ، فهو قاطع له في نقطة  $C$ .  
👉 : لنفترض إحداثيات النقطة  $C$  هي  $(a, b, c)$  عندئذٍ :

1. النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  على استقامة واحدة، فيوجد  $k \in \mathbb{R}$  يحقق :  $\vec{AC} = k\vec{AB}$ .

2. لدينا  $\vec{AC} = k\vec{AB}$  فيكون  $(a-2, b+1, c) = (-3k, 4k, 5k)$  ومنه :

$$a = -3k + 2, b = 4k - 1, c = 5k$$

3. لما كانت النقطة  $C$  تقع في المستوي  $\mathcal{P}$ ، فإن إحداثياتها تحقق معادلته أي :  $a - 3b + c - 5 = 0$  ومنه

$$k = \frac{2}{13} \text{ وبالتالي } C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

### 7 مستقيم عمودي على مستوٍ

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين  $A(2, 5, 3)$  و  $B(-1, 0, -1)$ ، ومستويًا  $\mathcal{P}$  يقبل شعاعين موجّهين. أثبت أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $\mathcal{P}$ .

### نحو الحل

👉 يكفي لإثبات المطلوب أن نبرهن أن الشعاع  $\vec{AB}$  عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي  $\mathcal{P}$ .

1. أعط شعاعاً  $\vec{w}$  موجّهاً للمستقيم  $(AB)$ . وتيقن أن الشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مرتبطين خطياً.

2. أثبت أن  $\vec{w}$  عمودي على كل من  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$ .

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.

لإثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ، نبرهن تعامد المستقيم مع مستقيمين متقاطعين في المستوي. أي نبرهن تعامد  $\vec{AB}$  مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي  $\mathcal{P}$ .

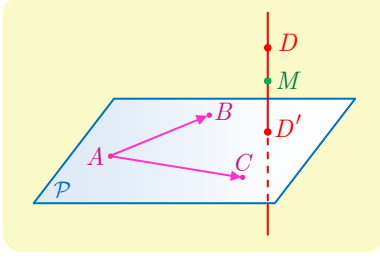
1. الشعاع  $\vec{w} = \vec{AB} = (-3, -5, -4)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$ ، ونلاحظ أن الشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2. نحسب  $\vec{w} \cdot \vec{u} = -3 - 5 + 8 = 0$  و  $\vec{w} \cdot \vec{v} = -9 + 5 + 4 = 0$  فنجد  $\vec{w} \perp \vec{u}$  و  $\vec{w} \perp \vec{v}$  ومن

العلاقتين السابقتين نستنتج تعامد المستقيم  $(AB)$  مع المستوي  $\mathcal{P}$ .

## 8 المسقط القائم على مسنوّ

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل النقاط  $A(1,2,0)$  و  $B(0,0,1)$  و  $C(1,5,5)$ . يُطلب تعيين  $D'$  المسقط القائم للنقطة  $D(-11,9,-4)$  على المستوي  $(ABC)$ .



نحو الحل

لنرسم شكلاً مبسطاً. كيف نجد إحداثيات النقطة  $D'$ ؟ نعلم أنّ المستقيم  $(DD')$  عمودي على المستوي  $(ABC)$ ، فهو من ثمّ عمودي على جميع مستقيمت هذا المستوي. الفكرة، إذن، تكمن في التعبير شعاعياً عن هذا التعامد.

1. اشرح لماذا  $M(x, y, z)$  تنتمي إلى  $(DD')$  إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  و  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

2. اكتب تحليلياً الشرطين السابقين.

3. استنتج أنّ  $(DD')$  هو مجموعة النقاط  $M\left(x, \frac{62-5x}{13}, \frac{3x-19}{13}\right)$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

علينا كتابة معادلة للمستوي  $(ABC)$  لأنّ  $D'$  هي النقطة  $M$  من  $(DD')$  التي تنتمي إلى هذا المستوي. ولكن أي شعاع موجّه للمستقيم  $(DD')$  هو شعاع ناظم على  $(ABC)$ .

1. بإعطاء قيمتين مختلفتين للمتحوّل  $x$  أعط إحداثيات نقطتين مختلفتين من  $(DD')$ .

2. استنتج مركّبات شعاع موجّه للمستقيم  $(DD')$ ، أي شعاع ناظم على  $(ABC)$ .

3. اكتب معادلة للمستوي  $(ABC)$ .

4. عيّن قيمة  $x$  التي تجعل النقطة  $M$  من 3. عنصراً من  $(ABC)$ . استنتج إحداثيات  $D'$ .

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.



علينا البحث عن إحداثيات النقطة  $D'$  المسقط القائم للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ .

1. بافتراض  $M(x, y, z)$  تنتمي إلى المستقيم  $(DD')$ ، ولما كان  $(DD')$  عمودياً على المستوي  $(ABC)$ ،

كان  $\overrightarrow{DD'}$  عمودياً على أي شعاع في المستوي  $(ABC)$ . وبوجه خاص  $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$  وهذا يعني  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  و  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

2. لدينا  $\overrightarrow{AB}(-1, -2, 1)$  و  $\overrightarrow{DM}(x+11, y-9, z+4)$  إذن من  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  نستنتج

$$(1) \quad -x - 2y + z + 11 = 0$$

ولدينا  $\overrightarrow{AC}(0, 3, 5)$  و  $\overrightarrow{DM}(x+11, y-9, z+4)$  إذن من  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  نستنتج

$$(2) \quad 3y + 5z - 7 = 0$$

3. نكتب العلاقتين (1) و (2)

$$\begin{aligned} -2y + z &= x - 11 \\ 3y + 5z &= 7 \end{aligned}$$

وبالحل نجد

$$\begin{aligned} z &= \frac{3}{13}x - \frac{19}{13} \\ y &= -\frac{5}{13}x + \frac{62}{13} \end{aligned}$$

إذن  $(DD')$  هو مجموعة النقاط  $M(x, -\frac{5}{13}x + \frac{62}{13}, \frac{3}{13}x - \frac{19}{13})$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

👉 إن أي شعاع موجه للمستقيم  $(DD')$  هو شعاع ناظم على المستوي  $(ABC)$ .

1. لتعيين نقطتين من  $(DD')$  بهدف تحديد شعاع موجه للمستقيم  $(DD')$ . نعلم أن  $D(-11, 9, -4)$  تقع على هذا المستقيم، وباختيار  $x = 2$  في صيغة  $M$  نستنتج أن  $D_1(2, 4, -1)$  تقع على  $(DD')$  أيضاً. وعليه نستنتج شعاعاً موجهاً للمستقيم  $(DD')$ ، وفي الوقت نفسه ناظماً على المستوي  $(ABC)$ ، هو

$$\vec{n} = \overrightarrow{DD_1}(13, -5, 3)$$

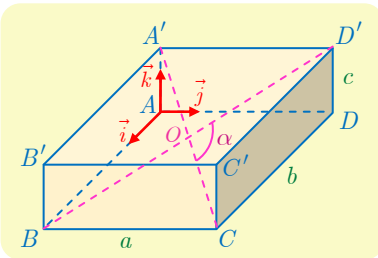
3. معادلة المستوي  $(ABC)$  هي إذن  $13(x-1) - 5(y-2) + 3z = 0$  أو  $13x - 5y + 3z = 3$ .

4. لتعيين قيمة  $x$  التي تجعل النقطة  $M$  عنصراً من  $(ABC)$  أي التي تجعل  $M$  منطبقة على  $D'$ ، يجب أن تحقق إحداثيات  $M$  معادلة المستوي  $(ABC)$  وبالتعويض نستنتج أن  $x = 2$ . إذن  $(2, 4, -1)$  هي إحداثيات النقطة  $D'$ .

**ملاحظة.** يمكن أيضاً تعيين  $D'$  من الشرطين  $D \neq D'$  و  $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0$ .



قُدماً إلى الأمام



9  $ABCD A' B' C' D'$  متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه  $[BD']$

و  $[CA']$  في  $O$ . نضع  $\alpha = \widehat{COD'}$ ، ونفترض أن  $BC = a$  و  $CD = b$  و  $DD' = c$ . نهدف في هذه المسألة إلى حساب  $\cos \alpha$ . نختار معلماً متجانساً  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بحيث يكون  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  مرتبطين خطياً، و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  مرتبطين خطياً، وكذلك  $\vec{i}$  و  $\vec{k}$  مرتبطين خطياً.

① أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه  $O$ .

② أثبت أن  $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ . ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.



لنأخذ المعلم المتجانس  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  عندئذٍ :

① إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات :

$$A(0,0,0), B(b,0,0), C(b,a,0), D(0,a,0)$$

$$A'(0,0,c), B'(b,0,c), C'(b,a,c), D'(0,a,c)$$

النقطة  $O$  منتصف القطر  $[A'C]$  فنكون إحداثياتها :  $O(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2})$

② لما كان  $\vec{OC} = (\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{c}{2})$  و  $\vec{OD}' = (-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2})$  استنتجنا أنّ

$$\vec{OC} \cdot \vec{OD}' = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) \quad \text{و} \quad \|\vec{OC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|\vec{OD}'\|$$

ومنه

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OD}'}{\|\vec{OC}\| \|\vec{OD}'\|} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً، يصبح  $a=b=c$  فيكون  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

⑩ في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد  $A$  عن المستوي  $\mathcal{P}$  :

①  $A(1,2,-3)$  و  $\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$

②  $A(-1,1,1)$  و  $\mathcal{P}$  هو المستوي المار بالنقاط  $B(0,1,0)$  و  $C(-1,1,0)$  و  $D(-1,-2,-3)$

① بعد  $A$  عن المستوي  $\mathcal{P}$  هو :

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|2 - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

② لنلاحظ أنّ  $\vec{BA} = (-1,0,1)$  و  $\vec{BC} = (-1,0,0)$  و  $\vec{BD} = (-1,-3,-3)$ . نلاحظ أنّ الشعاعين  $\vec{BC}$  و  $\vec{BD}$  غير مرتبطين خطياً، فهما يعرّفان مستويّاً  $(BCD)$ . كما إنّ  $A \notin (BCD)$  لأنّه لا يوجد عددين  $\alpha$  و  $\beta$  يحققان  $\vec{BA} = \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD}$ ، (علل).

لتكن النقطة  $A'$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على المستوي  $(BCD)$ ، فيكون  $AA'$  هو البعد المطلوب .  
بافتراض إحداثيات النقطة  $A'$  هي  $(a,b,c)$ ، عندئذٍ  $\vec{AA}' = (a+1, b-1, c-1)$ ، ولما كان  $\vec{BC} \perp \vec{AA}'$  كان  $\vec{BC} \cdot \vec{AA}' = 0$  ومنه  $a = -1$ . وبالمثل لما كان  $\vec{BD} \perp \vec{AA}'$  كان  $\vec{BD} \cdot \vec{AA}' = 0$ ، ومنه  $-a - 3b - 3c + 5 = 0$ ، وبالاستفادة من كون  $a = -1$  نجد أنّ  $c = 2 - b$ .

إذن أثبتنا أنّ  $A'(-1, b, 2 - b)$  و  $\vec{AA}' = (0, b - 1, 1 - b)$  (لاحظ أنّ  $b \neq 1$  وإلاّ كان  $A = A'$ ).  
وأخيراً  $\vec{BA}' \perp \vec{AA}'$  لأن  $A' \in (BCD)$  إذن  $(1 - b)(3 - 2b) = 0$  ومنه  $b = \frac{3}{2}$ ، إذن  $A'(-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  و  $\vec{AA}' = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  وخصوصاً  $\text{dist}(A, (BCD)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

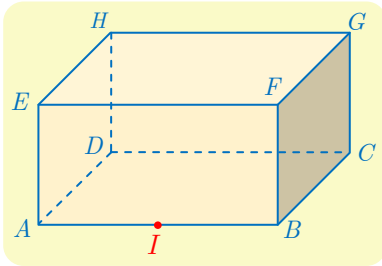
**طريقة ثانية:** بافتراض النقطة  $M(x, y, z)$  تنتمي إلى المستوي عندئذ يوجد عددين حقيقيين  $a, b$  يحققان :

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD} \quad \text{ومنه} \quad (x, y - 1, z) = (-a - b, -3b, -3b) \quad \text{ومنه نحصل على المعادلات} :$$

$$\text{وبالحل المشترك نحصل على معادلة المستوي (BCD)} : (BCD) : y - z - 1 = 0 \quad \text{ومنه بعد } A \quad \begin{cases} x = -a - b \\ y = -3b + 1 \\ z = -3b \end{cases}$$

$$\text{عن المستوي (BCD) يساوي} : \text{dist}(A, (BCD)) = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**11**  $AB C D E F G H$  متوازي مستطيلات، فيه  $AB = 2$  و  $BC = GC = 1$ . لتكن النقطة  $I$  منتصف



$[AB]$ .

① أعط معلماً متجانساً مبدؤه  $A$  ويمكن التعبير عن إحداثيات

رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.

② اكتب معادلة للمستوي  $(IFH)$ .

③ احسب بُعد  $G$  عن المستوي  $(IFH)$ .

④ احسب بُعد  $G$  عن المستقيم  $(IH)$ . أينتمي المسقط القائم للنقطة  $G$  على المستوي  $(IFH)$  إلى

المستقيم  $(IH)$  ؟

الحل

① لنأخذ المعلم المتجانس  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  حيث  $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AE}$  فتكون عندئذ إحداثيات

رؤوس متوازي المستطيلات في هذه الجملة بسيطة.

② معادلة المستوي  $(IFH)$ : النقطة  $I$  هي منتصف  $[AB]$  فيكون  $I(1, 0, 0)$  ولدينا  $F(2, 0, 1)$  و

$H(0, 1, 1)$ . المعادلة المطلوبة من الشكل  $ax + by + cz = d$ ، وتحققها إحداثيات هذه النقاط الثلاث،

إذن من  $I$  نستنتج  $a = d$ ، ومن  $F$  نستنتج  $2a + c = d$ ، وأخيراً من  $H$  نجد  $b + c = d$ .

إذن  $a = d$  و  $c = d - 2a = -d$  و  $b = d - c = 2d$ ، فمعادلة المستوي المطلوبة هي

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

$$\text{③} \quad \text{ومنه بعد } G \text{ عن المستوي } (IFH) \text{ يساوي} : \text{dist}(G, (IFH)) = \frac{|2 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

④ لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(IH)$  فهي إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتقلبتين  $(I, 1 - t)$

و  $(H, t)$  حيث  $t$  عددٌ حقيقي. إذن  $M(1 - t, t, t)$ ، تنطبق  $M$  على المسقط القائم للنقطة  $G$  على  $(IH)$

إذا فقط إذا تحقق الشرط  $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{IH}$  أي  $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{IH} = 0$  ولكن  $\overrightarrow{GM} = (-1 - t, t - 1, t - 1)$

و  $\overrightarrow{IH} = (-1, 1, 1)$  فشرط التعامد السابق يكافئ  $3t - 1 = 0$ ، ومنه تكون  $M(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  هي المسقط القائم للنقطة  $G$  على المستقيم  $(IH)$ ، ومن ثمَّ

$$\text{dist}(G, (IH)) = GM = \sqrt{(2 - \frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

12 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة  $A(2, 2, -1)$ ، والمستويين  $P$  و  $Q$ :

$$P : x - y + z = 0$$

$$Q : 3x + z - 1 = 0$$

احسب بُعد  $A$  عن المستقيم  $d$  الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين  $P$  و  $Q$ .

الحل

لتكن نقطة  $M(a, b, c)$  من الفصل المشترك للمستويين  $P$  و  $Q$ ، عندئذٍ إحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما:

$$3a + c - 1 = 0 \quad \text{و} \quad a - b + c = 0$$

ومنه  $c = 1 - 3a$  و  $b = c + a = 1 - 2a$ ، إذن إحداثيات  $M$  هي  $(a, 1 - 2a, 1 - 3a)$ ، وعليه يكون

$$\begin{aligned} \overline{MA}^2 &= (a - 2)^2 + (-1 - 2a)^2 + (2 - 3a)^2 = 14a^2 - 12a + 9 \\ &= 14\left(a - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{45}{7} \end{aligned}$$

وعليه أقصر مسافة بين  $A$  والمستقيم  $d$  هي  $3\sqrt{\frac{5}{7}}$ ، وتحققها النقطة  $(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$  من  $d$ . إذن

$$\text{dist}(A, d) = 3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

13 نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطة  $A(2, 1, 2)$ ، والمستويين  $P$  و  $Q$ :

$$P : x + y - 2z - 1 = 0$$

$$Q : x + y + z = 0$$

① أثبت أن المستويين  $P$  و  $Q$  متعامدان.

② احسب بُعد  $A$  عن كلٍّ من المستويين  $P$  و  $Q$ .

③ استنتج بُعد النقطة  $A$  عن الفصل المشترك للمستويين  $P$  و  $Q$ .

الحل

① المستويان  $P$  و  $Q$  متعامدان، لأنَّ شعاعيهما الناظرين  $\vec{n}_Q(1, 1, 1)$  و  $\vec{n}_P(1, 1, -2)$  متعامدان كما يبين حساب جدائهما السلمي.

$$\text{dist}(A, Q) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \text{dist}(A, P) = \frac{|2 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad ②$$

③ لتكن  $A_P$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على  $P$  وكذلك لتكن  $A_Q$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على  $Q$ ، ولتكن

$A'$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على الفصل المشترك  $d$  للمستويين  $P$  و  $Q$ . فيكون  $(AA_P)$  عمودياً على  $P$

فهو إذن عمودي على  $(A'P)$  (لأنّ الأخير محتوئ في  $\mathcal{P}$ ). لما كان  $d \perp (AA_P)$  و  $d \perp (AA')$  لأنّ  $d$  محتوئ في  $\mathcal{P}$  استنتجنا أنّ  $d$  عمودي على المستوي  $(AA_P A')$  وبوجه خاص  $d \perp (A_P A')$ ، ونبرهن بالمثل أنّ  $d \perp (A_Q A')$ . نستنتج من ذلك أنّ النقاط  $A$  و  $A_P$  و  $A'$  و  $A_Q$  تقع في مستو واحد هو المستوي المار بالنقطة  $A$  والعمودي على  $d$ . لأنّ  $\overrightarrow{AA_P}$  عمودي على  $\mathcal{P}$  فهو شعاع ناظم على  $Q$ ، وكذلك يكون  $\overrightarrow{AA_Q}$  شعاعاً ناظماً على  $\mathcal{P}$ ، ولكنّ هذين المستويين متعامدان إذن  $\overrightarrow{AA_P} \perp \overrightarrow{AA_Q}$  فالرباعي  $AA_P A' A_Q$  مستطيل لأنّ فيه ثلاث زوايا قائمة. وعليه

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AA'}\|^2 &= \|\overrightarrow{AA_P}\|^2 + \|\overrightarrow{AA_Q}\|^2 \\ &= \text{dist}^2(A, \mathcal{P}) + \text{dist}^2(A, Q) \\ &= \frac{25}{3} + \frac{2}{3} = 9 \end{aligned}$$

**14** في كل من الحالات الآتية، نُعطى نقطتين  $A$  و  $B$  والمعادلة الديكارتية لمستوي  $\mathcal{P}$ . نبيّن في كل حالة أنّ المستقيم  $(AB)$  ليس عمودياً على  $\mathcal{P}$ . ثمّ أعطِ معادلة للمستوي  $Q$  العمودي على  $\mathcal{P}$  والمار بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

$$B(0,1,1), \quad A(1,0,0), \quad \mathcal{P} : x + y + z = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$B(1,0,1), \quad A(1,2,0), \quad \mathcal{P} : x + z = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$B(1,1,1), \quad A(2,3,-1), \quad \mathcal{P} : 2x + z - 4 = 0 \quad \textcircled{3}$$

الحل

لإثبات أنّ المستقيم  $(AB)$  لا يتعامد مع المستوي  $\mathcal{P}$  يكفي أن نبرهن أنّ  $\overrightarrow{AB}$  و  $\vec{n}_P$  غير مرتبطين خطياً.

$$\textcircled{1} \quad B(0,1,1), \quad A(1,0,0) \quad \text{و} \quad \mathcal{P} : x + y + z = 0$$

الشعاعان  $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$  و  $\vec{n}_P(1,1,1)$  غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، فالمستقيم  $(AB)$  ليس عمودياً على المستوي  $\mathcal{P}$ .

للمستوي  $Q$  معادلة من الشكل  $ax + by + cz = d$  حيث الأعداد  $(a, b, c, d)$  ليست جميعها معدومة. ولأنّ  $Q$  يمر بالنقطتين  $A$  و  $B$  فإنّ إحداثياتهما تحقق معادلته، ومنه  $b + c = d$  و  $a = d$ ، ومن تعامد الناظمين  $\vec{n}_Q(a, b, c)$  و  $\vec{n}_P(1,1,1)$  نستنتج أيضاً أنّ  $a + b + c = 0$  إذن  $a = d = 0$  و  $b + c = 0$ . فمعادلة  $Q$  هي  $b(y - z) = 0$  ولأنّ  $b \neq 0$  نجد  $Q : y - z = 0$ .

$$\textcircled{2} \quad \text{في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق} \quad Q : 2x - y - 2z = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \text{في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق} \quad Q : -2x + 5y + 4z - 7 = 0$$

15 نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستويين  $Q$  و  $P$ :

$$Q: x + y + z + 1 = 0 \quad \text{و} \quad P: x - 2y + 3z - 5 = 0$$

- ① علّل كون المستويين  $Q$  و  $P$  متقاطعين. نرمز بالرمز  $d$  إلى فصلهما المشترك.
- ② أثبت أنّ  $d$  هو مجموعة النقاط  $M\left(1 - \frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$  عندما تتحوّل  $z$  في  $\mathbb{R}$ .
- ③ أعط شعاعاً موجّهاً للمستقيم  $d$ .
- ④ اكتب معادلة للمستوي  $\mathcal{R}$  العمودي على كل من  $Q$  و  $P$  ويمر بالنقطة  $A(2, 5, -2)$ .

الحل

$$Q: x + y + z + 1 = 0 \quad \text{و} \quad P: x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \text{لدينا}$$

① الناظران  $\vec{n}_Q(1, 1, 1)$  و  $\vec{n}_P(1, -2, 3)$  غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعان.

② تنتمي  $M(x, y, z)$  إلى المستقيم  $d$ ، إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها معادلتى المستويين  $Q$  و  $P$  أي:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3z & (1) \\ x + y = -1 - z & (2) \end{cases}$$

وبالحل نجد  $x = 1 - \frac{5}{3}z$  و  $y = \frac{2}{3}z - 2$ . إذن إحداثيات  $d$  هي مجموعة النقاط  $M\left(1 - \frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$  عندما تتحوّل  $z$  في  $\mathbb{R}$ .

③ نختار نقطتين من بإعطاء قيمتين للعدد  $z$ . في حالة  $z = 0$  نجد  $A(1, -2, 0)$  من  $d$ ، وفي حالة  $z = 3$  نجد  $B(-4, 0, 3)$  من  $d$ . ومنه الشعاع الموجّه  $\vec{u} = \overline{AB} = (-5, 2, 3)$  للمستقيم  $d$ .

④ المستوي  $\mathcal{R}$  عمودي على كل من  $Q$  و  $P$ ، إذن هو عمودي على فصلهما المشترك  $d$  ويقبل  $\vec{u}$  شعاعاً ناظماً. فمعادلته من الشكل  $-5x + 2y + 3z = k$ ، وتتعين  $k$  بشرط مرور  $\mathcal{R}$  بالنقطة  $A(2, 5, -2)$ ، فنجد أنّ  $d = -26$ ، ومعادلة  $\mathcal{R}$  هي  $5x - 2y - 3z - 6 = 0$ .

16 نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$$E(1, -1, 1) \quad \text{و} \quad D(0, 4, 0) \quad \text{و} \quad C(4, 0, 0) \quad \text{و} \quad B(1, 0, -1) \quad \text{و} \quad A(2, 1, 3)$$

① أثبت أنّ النقاط  $C$  و  $D$  و  $E$  ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أنّ المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(CDE)$ .

الحل

① نلاحظ أنّ الشعاعين  $\overline{CD} = (-4, 4, 0)$  و  $\overline{CE} = (-3, -1, 1)$  غير مرتبطين خطياً فالنقاط  $C$  و  $D$  و  $E$  ليست واقعة على استقامة واحدة.

② لإثبات أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(CED)$  نلاحظ أن  $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -4)$  ونحسب

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-1)(-4) + (-1)(4) + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = (-1)(-3) + (-1)(-1) + (-4)(1) = 0$$

أي  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$  و  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE}$ ، فالمستقيم  $(AB)$  عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي  $(CED)$  وهو من ثم عمودي على  $(CED)$ .

**17** نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$$D(3, 3, -3) \text{ و } C(1, -1, 1) \text{ و } B(4, -2, 3) \text{ و } A(2, 4, 3)$$

① أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست واقعة على استقامة واحدة.

② عين إحداثيات المسقط القائم  $D'$  للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ .

### الجدل

① نلاحظ أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB} = (2, -6, 0)$  و  $\overrightarrow{AC} = (-1, -5, -2)$  غير مرتبطين خطياً فالنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست واقعة على استقامة واحدة.

② النقطة  $D'$  نقطة من المستوي  $(ABC)$  فيوجد عدنان  $a$  و  $b$  يحققان  $\overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ، ومن ثم

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

لتعيين  $a$  و  $b$  نستفيد من كون  $\overrightarrow{DD'}$  عمودياً على كل من  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  فنعبّر عن ذلك باستعمال الجداء السلمي:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ 0 &= \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

ولكن  $\overrightarrow{AB} = (2, -6, 0)$ ، و  $\overrightarrow{AC} = (-1, -5, -2)$ ، و  $\overrightarrow{AD} = (1, -1, -6)$  كما إن

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 40 \text{ و } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 30 \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 \text{ و } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \text{ و } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$$

فالجملتان السابقتان تكافئ

$$\begin{cases} 40x + 28y = 8 \\ 28x + 30y = 16 \end{cases}$$

فإذا طرحنا الثانية من ضعفي الأولى وجدنا  $52x + 26y = 0$  ومنه  $y = -2x$  وبالتعويض في الأولى

مثلاً نجد  $x = -\frac{1}{2}$  ومن ثم  $y = 1$ . وأخيراً لأن  $\overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$  نستنتج أن

$$\begin{bmatrix} x_{D'} - 2 \\ y_{D'} - 4 \\ z_{D'} - 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومن ثم  $D'(0, 2, 1)$ .

**18** نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطتين  $\Omega(2, -1, 3)$  و  $A(-1, 0, 1)$ . نهدف إلى كتابة معادلة

للكرة  $S$  التي مركزها  $\Omega$  وتمر بالنقطة  $A$ .

① احسب  $\Omega A$ .

② لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفراغ احسب  $\Omega M^2$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $z$ .

③ أثبت أن «نقطة  $M(x, y, z)$  من  $S$ » إذا وفقط إذا تحقق الشرط « $\Omega M^2 = \Omega A^2$ » واستنتج

معادلة للكرة  $S$  المطلوبة.

$$\Omega A = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \quad \text{①}$$

الحل

② لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفراغ فيكون  $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$

③ نصف قطر الكرة المطلوبة هو  $R = \Omega A = \sqrt{14}$ . إذن  $M \in S$  إذا وفقط إذا  $\Omega M = R$  وهذا يكافئ

الشرط  $\Omega M^2 = \Omega A^2$ ، ومنه معادلة  $S$  هي  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$ .

**19** في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $\Omega$  وتمر بالنقطة  $A$ .

①  $\Omega(0, 0, 1)$  و  $A(1, 1, 1)$  . ②  $\Omega(0, 5, -1)$  و  $A(1, -2, 3)$ .

الحل

(التمرين السابق)

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \quad \text{①}$$

$$x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 66 \quad \text{②}$$

**20** في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $\Omega$  ونصف قطرها  $r$ .

①  $\Omega(1, 2, 3)$  و  $r = 2$  . ②  $\Omega(0, 5, -1)$  و  $r = \sqrt{3}$ .

الحل

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4 \quad \text{①}$$

$$x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3 \quad \text{②}$$

21 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . عيّن طبيعة مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  في الحالات الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0 \quad ② \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0 \quad ①$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5 = 0 \quad ④ \quad x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0 \quad ③$$

الحل

نرد كل معادلة إلى الصيغة  $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \alpha$

① تصبح المعادلة:  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 12$ . فمجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  تمثل كرة مركزها

$$\Omega = (1, -3, 0) \text{ ونصف قطرها } r = 2\sqrt{3}.$$

② تصبح المعادلة:  $(x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 0$ . فمجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحققها هي

$$\text{النقطة } \Omega = (5, 0, -1).$$

③ تصبح المعادلة:  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ . فمجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  تمثل كرة

$$\text{مركزها } \Omega = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ ونصف قطرها } r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

④ تصبح المعادلة:  $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = -1$ . فمجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق هذه

المعادلة مجموعة خالية من النقاط.

22 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقطة  $A(2, -2, 2)$  والمستوي  $\mathcal{P}: x + 2y + 3z = 5$ . اكتب

معادلة للكرة التي مركزها  $A$  وتمس المستوي  $\mathcal{P}$ .

الحل

الكرة تلمس المستوي  $\mathcal{P}$  إذن بعد مركزها عن المستوي يساوي نصف قطر الكرة.

$$R = \text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|2 - 4 + 6 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

ومعادلة الكرة المطلوبة هي  $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{14}$ .

23 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقطتين  $A(2, 1, 2)$  و  $B(-2, 0, 2)$ .

① أعط معادلة للمجموعة  $\mathcal{E}$  المكوّنة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تُحقّق  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ .

② ما طبيعة المجموعة  $\mathcal{E}$ ؟

الحل

لدينا النقطتان  $A(2, 1, 2)$  و  $B(-2, 0, 2)$

$$\textcircled{1} \text{ النقطة } M(x, y, z) \text{ تحقق } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } \begin{bmatrix} 2-x \\ 1-y \\ 2-z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2-x \\ 0-y \\ 2-z \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{ومنه } x^2 - 4 + y^2 - y + (z-2)^2 = 0$$



② تكتب المعادلة السابقة بعد الإصلاح بالصيغة:  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - 2)^2 = \frac{17}{4}$ ، وهي معادلة كرة مركزها  $A(0, \frac{1}{2}, 2)$ ، ونصف قطرها  $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

24 نتأمل نقطتين مختلفتين  $A$  و  $B$  في الفراغ. نضع  $r = \frac{1}{2}AB$ ، ونعرّف  $I$  منتصف  $[AB]$ .

① أثبت أنه في حالة نقطة ما  $M$  من الفراغ تتحقق المساواة:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - r^2$ .

② أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  هي الكرة التي مركزها  $I$  ونصف قطرها  $r$ ، وهي أيضاً الكرة التي تقبل  $[AB]$  قطراً فيها.

الحل

① لدينا  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $r = \frac{1}{2}AB = IA$  ومنه

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - r^2\end{aligned}$$

② إذن  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  تكافئ  $MI^2 = r^2$  وهذا يعني أن مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  هي الكرة التي مركزها  $I$  ونصف قطرها  $r$  ويكون من ثمّ  $AB$  قطر فيها.

25 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقطتين  $A(1, 1, 1)$  و  $B(0, -1, -1)$ .

① أعط معادلة للمجموعة  $\mathcal{E}$  المكوّنة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تُحقق  $MA = 2MB$ .

② ما طبيعة المجموعة  $\mathcal{E}$ ؟

③ أعط معادلة للمجموعة  $\mathcal{P}$  المكوّنة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تُحقق  $MA = MB$ .

④ ما طبيعة المجموعة  $\mathcal{P}$ ؟

الحل

① تحقق النقطة  $M(x, y, z)$  الشرط  $MA = 2MB$  إذا وفقط إذا كان  $MA^2 = 4MB^2$  وهذا يكافئ

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4(x^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2)$$

الذي يكتب بعد الإصلاح بالصيغة  $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}y + \frac{10}{3}z + \frac{5}{3} = 0$

② وهي تكافئ بعد الإتمام إلى مربعات كاملة  $(x + \frac{1}{3})^2 + (y + \frac{5}{3})^2 + (z + \frac{5}{3})^2 = 4$ . إذن مجموعة

النقاط  $M$  التي تحقق الشرط  $MA = 2MB$  هي الكرة التي مركزها  $\Omega(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$  ونصف قطرها يساوي  $R = 2$ .

③ تحقق النقطة  $M(x, y, z)$  الشرط  $MA = MB$  إذا وفقط إذا كان  $MA^2 = MB^2$  وهذا يكافئ

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$$

الذي يكتب بعد الإصلاح:  $2x + 4y + 4z - 1 = 0$ .

④ المعادلة :  $2x + 4y + 4z - 1 = 0$  تمثل معادلة مستو. إذن مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق الشرط  $MA = MB$  هي مستو، وهو في الحقيقة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

**26** نتأمل نقطتين مختلفتين  $A$  و  $B$  في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم  $k$ . نعرّف مجموعة نقاط الفراغ  $M$  التي تحقق الشرط  $AM = k \cdot BM$ .  
① حالة  $k = 1$ .

① لتكن  $I$  منتصف  $[AB]$  أثبت أن

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - MB^2}{2}$$

② استنتج أن  $\mathcal{E}_1$  هي المستوي  $\mathcal{P}$  المار بمنتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  والعمودي على  $(AB)$ .  
(المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ ).  
② حالة  $k \neq 1$ .

① لتكن  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1)$  و  $(B, k)$ ، ولتكن  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1)$  و  $(B, -k)$ . أثبت أن

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1 - k^2}(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1 - k^2}$$

② استنتج أن  $\mathcal{E}_k$  هي الكرة  $S$  التي تقبل القطعة المستقيمة  $[IJ]$  قطراً فيها.

الجل

① حالة  $k = 1$ .

① لما كان  $I$  منتصف  $[AB]$  كان  $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$  وكان أيضاً  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$  ومنه

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) = \frac{MA^2 - MB^2}{2}$$

وهو المطلوب .

② هنا  $M \in \mathcal{E}_1$  يكافئ الشرط  $MA = MB$ ، وهذا يكافئ استناداً إلى ما سبق  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$ ، أي إن  $M$  تنتمي إلى المستوي المار بالنقطة  $I$  والعمودي على الشعاع  $\overrightarrow{AB}$ . فهو إذن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

② حالة  $k \neq 1$

① لأن  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1)$  و  $(B, k)$  فإن :  $\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} = \vec{0}$  إذن

$$(1) \quad \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1 + k)\overrightarrow{MI}$$

ولأن  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,-k)$  فإن  $\vec{JA} - k\vec{JB} = \vec{0}$  إذن

$$(2) \quad \vec{MA} - k\vec{MB} = (1-k)\vec{MJ}$$

من (1) و (2) نجد  $(1-k^2)\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = (\vec{MA} + k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - k\vec{MB})$  ومنه

$$\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = \frac{1}{1-k^2}(MA^2 - k^2MB^2) = \frac{MA^2 - k^2MB^2}{1-k^2}$$

② نا  $M \in \mathcal{E}_k$  يُكافئ الشرط  $MA = kMB$ ، وهذا يُكافئ استناداً إلى ما سبق  $\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$ ، وهذا

يعني أن  $M$  تنتمي إلى الكرة التي قطرها  $[IJ]$ ، استناداً إلى ما أثبتناه في التمرين 24 .

**27** في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقاط

$$.D(0,0,-3) \text{ و } C(3,-3,-1) \text{ و } B(2,2,2) \text{ و } A(4,0,-3)$$

① أعط معادلة للمستوي المحوري  $\mathcal{P}_1$  للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

② أعط معادلة للمستوي المحوري  $\mathcal{P}_2$  للقطعة المستقيمة  $[BC]$ .

③ أعط معادلة للمستوي المحوري  $\mathcal{P}_3$  للقطعة المستقيمة  $[CD]$ .

④ علّل لماذا إذا تقاطعت المستويات  $\mathcal{P}_1$  و  $\mathcal{P}_2$  و  $\mathcal{P}_3$  في نقطة واحدة  $\Omega$ . كانت  $\Omega$  مركزاً لكرة تمرّ

بالنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ .

⑤ بحلّ جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل أثبت أن المستويات  $\mathcal{P}_1$  و  $\mathcal{P}_2$  و  $\mathcal{P}_3$  تتقاطع في

نقطة واحدة  $\Omega$ .

⑥ احسب نصف قطر الكرة  $S$  المارة بالنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ .

⑦ اكتب معادلة للكرة  $S$  المارة برؤوس رباعي الوجوه  $ABCD$ .

**الحل**

لدينا النقاط :  $A(4,0,-3)$  و  $B(2,2,2)$  و  $C(3,-3,-1)$  و  $D(0,0,-3)$ .

① إذا كانت  $M$  منتصف القطعة  $[AB]$  كانت إحداثياتها  $M(3,1,-\frac{1}{2})$ . وكان  $\vec{AB}(-2,2,5)$  شعاعاً

ناظماً على المستوي المحوري  $\mathcal{P}_1$ . فتكون معادلة المستوي  $\mathcal{P}_1$  هي :

$$-2(x-3) + 2(y-1) + 5(z + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\text{أي } \mathcal{P}_1 : -4x + 4y + 10z + 13 = 0$$

② تنتمي  $M(x,y,z)$  إلى  $\mathcal{P}_2$  إذا وفقط إذا كان  $MB^2 = MC^2$  وهذا يكافئ

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2$$

وهذا يكافئ بعد الإصلاح  $2x - 10y - 6z - 7 = 0$  وهي معادلة  $\mathcal{P}_2$ .

③ نجد بمثل ما سبق معادلة  $\mathcal{P}_3 : -3x + 3y - 2z + 5 = 0$ .

④ إذا تقاطعت المستويات الثلاثة في نقطة  $\Omega$  فهي تُحقّق  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$  وهي إذن مركز الكرة المارة بالنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ .

⑤ علينا إذن حل جمل المعادلات

$$4x - 4y - 10z = 13$$

$$2x - 10y - 6z = 7$$

$$3x - 3y + 2z = 5$$

من الأولى والأخيرة نجد  $x - y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z = \frac{13}{4} + \frac{5}{2}z$  ومنه  $z = -\frac{1}{2}$  و  $x - y = 2$ . وبتعويض قيمة  $z$  و  $x = y + 2$  في الثانية نجد  $y = 0$  ومن ثمّ  $x = 2$ . إذن  $\Omega(2, 0, -\frac{1}{2})$ .

⑥ نصف قطر الكرة يساوي مثلاً  $R = \Omega D$  إذن  $R = \sqrt{4 + 0 + (-3 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{41}{4}}$ .

⑦ إذن معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه  $ABCD$  هي :  $(x - 2)^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$ .

# 3

## المستقيمت والمستويات في الفراغ

- 1 المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة
- 2 التمثيلات الوسيطة
- 3 تقاطع مستقيمت ومستويات
- 4 تقاطع ثلاثة مستويات

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعيين المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة.
- التمثيل الوسيط للمستقيم والمستوي.
- تقاطع المستقيمت والمستويات، وحل المعادلات الخطية.

## تَدْرِبْ صَفِيحَة 80

① النقطتان  $A$  و  $B$  نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عَيِّن  $t$  التي تحقق  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ .

①  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, -2)$  و  $(B, 1)$ .

②  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 2)$  و  $(B, 3)$ .

الحل

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \quad ① \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \quad ②$$

② أعطِ في الحالات الآتية  $\alpha$  و  $\beta$  لتكون  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$ .

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \quad ① \quad 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad ② \quad \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad ③$$

الحل

$$\alpha = 5, \beta = 2 \quad ① \quad \alpha = 3, \beta = -1 \quad ② \quad \alpha = 4, \beta = -3 \quad ③$$

③ في الشكل الآتي التدرجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين.



الحل

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{4AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{6BA} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{6CA} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0} \end{array} \right\} ② \quad \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{5AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{2BA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{2CA} - 5\overrightarrow{CB} = \vec{0} \end{array} \right\} ①$$

④ نتأمل مثلثاً  $ABC$ . في كل حالة مما يأتي، جِدْ عددين  $x$  و  $y$  بحيث  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

①  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, -1)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, 1)$ .

②  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 3)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, 2)$ .

الحل

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad ① \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad ②$$

⑤ نتأمل مثلثاً  $ABC$ . في كل حالة مما يأتي، جِدْ الأعداد  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون  $M$  مركز الأبعاد

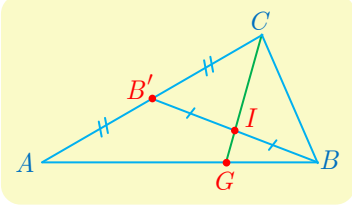
المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$ .

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \quad ② \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{2AB} - \overrightarrow{AC} \quad ① \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad ④ \\ \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{3CA} + \overrightarrow{2CB} \quad ③ \end{array}$$

الجل

- 1  $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$  2  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$   
3  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4$  4  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$

6 انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون  $I$

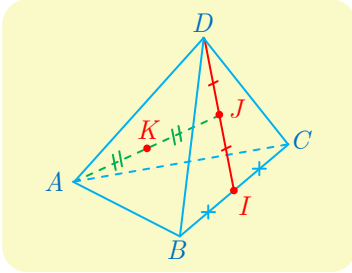


مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$ .  
واستنتج  $\lambda$  التي تحقق  $\vec{GA} + \lambda \vec{GB} = \vec{0}$

الجل

$\lambda = 2$  و  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$

7 انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  لتكون



مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$ .

الجل

مثلاً في حالة نقطة كيفية  $M$  من الفراغ لدينا

$$\begin{aligned}\vec{MK} &= \frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MJ} = \frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{MD} + \frac{1}{2}\vec{MI}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{4}\vec{MD} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{1}{2}\vec{MC}\right) \\ 8\vec{MK} &= 4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 2\vec{MD}\end{aligned}$$

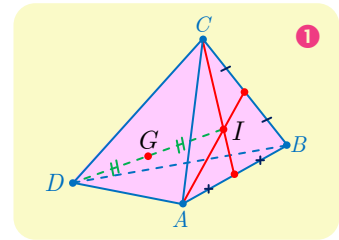
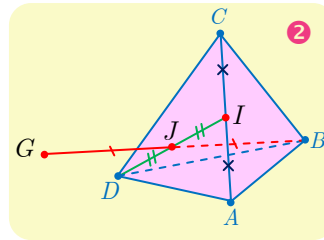
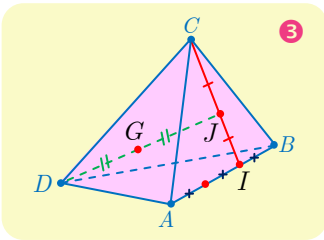
ومنه  $\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2$

8  $ABCD$  رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة  $G$  في الحالات الآتية:

- 1  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, 1)$  و  $(D, 3)$ .  
2  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, -1)$  و  $(B, 2)$  و  $(C, -1)$  و  $(D, -2)$ .  
2  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1)$  و  $(B, 2)$  و  $(C, 3)$  و  $(D, 6)$ .

الجل

يبين الرسم الآتي حالات الإنشاء الثلاث:





## تَدْرِبْ صَفْحَةَ 84

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

① أعط معادلة وسيطية للمستقيم  $d$ :

① المستقيم  $d$  يمر بالنقطة  $A(-1, 2, 0)$  وموجه بالشعاع  $\vec{u}(0, 1, -1)$ .

②  $d = (AB)$  حيث  $A(2, 1, -1)$  و  $B(3, -1, 1)$ .

الجل

①  $\{(x, y, z) = (-1, 2 + t, -t), t \in \mathbb{R}\}$       ②  $\{(x, y, z) = (2 + t, 1 - 2t, -1 + 2t), t \in \mathbb{R}\}$

② نتأمل النقطتين  $A(-2, 1, 0)$  و  $B(2, 3, 1)$ . أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من

① المستقيم  $(AB)$ .      ② القطعة المستقيمة  $[AB]$ .

③ نصف المستقيم  $[AB]$ .      ④ نصف المستقيم  $[BA]$ .

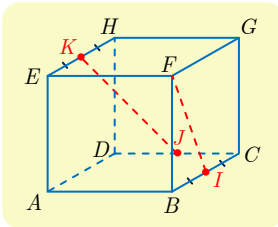
الجل

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = t. \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \text{②}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 1 + t. \end{cases} \quad t \leq 0 \quad \text{④}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = t. \end{cases} \quad t \geq 0 \quad \text{③}$$



③  $ABCDEFHG$  مكعب طول ضلعه 1. فيه  $I$  منتصف  $[BC]$  و  $J$  منتصف  $[CD]$  و  $K$  منتصف  $[EH]$ . نتأمل المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

① أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من  $(IK)$  و  $(FJ)$ .

② أيتقاطع المستقيمان  $(IK)$  و  $(FJ)$ ? هل تقع النقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $F$  في مستو واحد؟

الجل

① لما كان  $I(1, \frac{1}{2}, 0)$  و  $K(0, \frac{1}{2}, 1)$  كان  $\overrightarrow{IK}(-1, 0, 1)$ ، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم  $(IK)$ :

$$(IK): \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 1/2 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

وبالمثل لما كان  $J(\frac{1}{2}, 1, 0)$  و  $F(1, 0, 1)$  كان  $\overrightarrow{FJ}(-\frac{1}{2}, 1, -1)$ ، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم  $(JF)$ :

$$(JF): \begin{cases} x = -t/2 + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2 يتقاطع المستقيمان  $(JK)$  و  $(IK)$  إذا وُجد  $s$  و  $t$  بحيث

$$-s/2 + 1 = -t + 1$$

$$s = 1/2$$

$$-s + 1 = t$$

من المعادلتين الثانية والثالثة نجد  $s = t = \frac{1}{2}$ ، ولكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة الأولى، إذن المستقيمان  $(JK)$  و  $(IK)$  غير متقاطعين. وهما أيضاً غير متوازيين لأن الشعاعين  $\vec{JK}$  و  $\vec{IK}$  غير مرتبطين خطياً فهما لا يقعان في مستو واحد. إذن لا تقع النقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $F$  في مستو واحد لأن المستقيمين  $(JK)$  و  $(FJ)$  غير متقاطعين وغير متوازيين.

## تَدْرِبْ صفحة 87

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1 في الحالات الآتية تحقق من تقاطع المستويين  $P_1$  و  $P_2$  وأعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

1  $P_1 : x + y = 2$  و  $P_2 : x + z = 1$

2  $P_1 : -x + y + z = 3$  و  $P_2 : 2x - y + 2z = 1$

### الحل

1 المستويان متقاطعان لأن النقطة  $M(1,1,0)$  (مثلاً) تنتمي إلى كلٍّ منهما. أما التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار  $x = t$  وسيطاً:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2, & t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

2 المستويان متقاطعان لأن النقطة  $M(4,7,0)$  (مثلاً) تنتمي إلى كلٍّ منهما. أما التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار  $z = t$  وسيطاً:

$$\begin{cases} x = -3t + 4 \\ y = -4t + 7, & t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

2 في الحالات الآتية، أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d'$  وبيّن إذا كان  $d' \parallel d$  أو كان  $d$  منطبقاً على  $d'$ .

1  $d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$  و  $d': \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  2  $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$  و  $d': \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$

## الحل

①  $d' : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$  هنا لدينا  $d \parallel d'$  ولكن المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط مشتركة.

②  $d' : \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$  هنا أيضاً لدينا  $d \parallel d'$  ولكن المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط

مشتركة.

③ في الحالات الآتية أثبت تقاطع المستقيم  $d$  مع المستوي  $P$  وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

①  $d = (AB)$  حيث  $A(-1, 2, 3)$  و  $B(1, 2, -1)$ ، و  $P : x + y + z = 1$ .

②  $d$  يمر بالنقطة  $A(2, -1, 0)$  ويوجهه الشعاع  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  و  $P : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$ .

## الحل

① نجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$

$$d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي  $(2, 2, -3)$ .

② نجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$

$$d : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي  $(0, 3, 0)$ .

④ في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم  $d$  والمستوي  $P$ .

$$P: 2x + 3y - z = 0, \quad d: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 1 \\ z = 8s - 3 \end{cases} \quad P: x - y + z = 1, \quad d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

## الحل

① يتقاطع المستقيم والمستوي في نقطة واحدة هي  $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ .

② بتعويض قيم  $x$  و  $y$  و  $z$  في التمثيل الوسيطى للمستقيم  $d$  في معادلة المستوي نجد أن المستقيم والمستوي لا يتقاطعان فهما متوازيان.

## تَدْرِبْ صفحة 90

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حلّ الجملة الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تشترك بأية نقطة:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x - 2y - 3z = 3 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x - y - 4z = 7 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases} \quad \text{2}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 5x + y + z = -5 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x + 13y - 7z = -1 \\ \mathcal{P}_3 : & x - y + z = 1 \end{cases} \quad \text{1}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases} \quad \text{4}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 0 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 0 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{3}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x + y + z = 1 \\ \mathcal{P}_2 : & x - 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases} \quad \text{6}$$

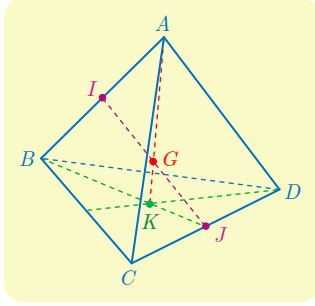
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases} \quad \text{5}$$

### الحل

بحلّ الجملة الموافقة في كلّ مرّة نجد أنّه في الحالتين 1 و 2 تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة. وفي الحالتين 3 و 4 تتقاطع المستويات الثلاثة في مستقيم معطى بتمثيل وسيطي. وفي الحالتين الأخيرتين لا تتقاطع المستويات الثلاثة بأية نقطة وذلك وفق ما يأتي :

$$\begin{array}{ll} x = 2, y = 1, z = -1 & \text{2} \\ x = -8, y = 13, z = 22 & \text{1} \\ x = 7t, y = \frac{1}{7} - t, z = \frac{5}{7} - 5t, t \in \mathbb{R} & \text{4} \\ x = 7t, y = -t, z = -5t, t \in \mathbb{R} & \text{3} \\ \{ \} & \text{6} \\ \{ \} & \text{5} \end{array}$$

## أنشطة



### نشاط 1 مستقيمتان متقاطعة في الفراغ

#### 1 خواص عامة لخواص رباعي الوجوه

ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه ما. ولتكن  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوسه مزودة جميعها بالأمثال 1 ذاتها. وليكن  $K$  مركز ثقل المثلث  $BCD$ . وكذلك ليكن  $I$  و  $J$  منتصفي  $[AB]$  و  $[CD]$  بالترتيب.

① نسمي القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل **متوسطاً** في رباعي الوجوه. نهدف إلى إثبات تلاقي المتوسطات جميعها في نقطة واحدة هي النقطة  $G$ . ولهذا نسمي  $G$  مركز ثقل رباعي الوجوه.

*a.* استعمل الخاصية التجميعية لتثبت أن  $G$  تقع على  $[AK]$  وأن  $AG = \frac{3}{4}AK$ .

*b.* أثبت بالمثل أن  $G$  تقع على المتوسطات الثلاثة الأخرى.

② نهدف في هذا السؤال إلى إثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات الأحراف المتقابلة في رباعي الوجوه تتلاقى أيضاً في  $G$ ، وأن  $G$  تقع في منتصف كل منها.

*a.* أثبت أن  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I;2)$  و  $(J;2)$ . واستنتج أن  $G$  تقع في منتصف  $[IJ]$ .

*b.* أثبت صحة الخاصية المشار إليها في ②.

#### 2 مسألة مستقيمتان متقاطعة

ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه ما. ولنعرّف النقاط  $P$  و  $Q$  و  $R$  و  $S$  كما يأتي :

$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

نريد إثبات تلاقي المستقيمين  $(PQ)$  و  $(RS)$ .

① *a.* أثبت أن  $P$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B;4)$  و  $(C;1)$ . وأن  $Q$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A;1)$  و  $(D;3)$ .

*b.* ليكن  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A;1)$  و  $(B;4)$  و  $(C;1)$  و  $(D;3)$ . بين أن  $G$  تقع على المستقيم  $(PQ)$ .

② أثبت بأسلوب مماثل أن  $G$  تقع أيضاً على  $(RS)$ ، فالمستقيمان  $(PQ)$  و  $(RS)$  متقاطعان.

③ لتكن  $I$  منتصف  $[AC]$ . أثبت تلاقي المستقيمين  $(IG)$  و  $(BD)$ ، وعين نقطة تقاطعهما.

① a. استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(K,3)$ . إذن تنتمي  $G$  إلى القطعة المستقيمة  $[AK]$  وتحقق  $AG = \frac{3}{4}AK$ .

① b. بسبب الدور المتناظر الذي تؤديه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أن  $G$  تقع على جميع متوسطات رباعي الوجوه وتقسّم كلّاً منها بنسبة 3 : 1.

② a. لما كان  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,1)$ ، و  $J$  أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C,1)$  و  $(D,1)$ ، استنتجنا استناداً إلى الخاصة التجميعية أن  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I,2)$  و  $(J,2)$ ، أي إن  $G$  هي منتصف القطعة المستقيمة  $[IJ]$ .

② b. بسبب الدور المتناظر الذي تؤديه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أن  $G$  تقع أيضاً في منتصف جميع القطع المستقيمة التي يصل كل منها بين منتصفين متقابلين في رباعي الوجوه.

② a. لما كان

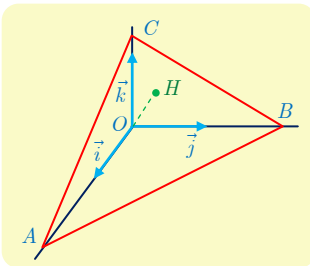
$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\overrightarrow{PC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{PB} &= \frac{1}{5}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \vec{0} \\ \frac{3}{4}\overrightarrow{QD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{QA} &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD}) - \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AQ} = \vec{0}\end{aligned}$$

استنتجنا أن  $P$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B,4)$  و  $(C,1)$ ، و  $Q$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(D,3)$ .

① b. استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(P,5)$  و  $(Q,4)$ ، وعلى الخصوص  $G$  تقع على المستقيم  $(PQ)$ .

② نبرهن بأسلوب مماثل لما سبق أن  $R$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(B,4)$ ، و  $S$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C,1)$  و  $(D,3)$ . إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(R,5)$  و  $(S,4)$ ، وعلى الخصوص  $G$  تقع على المستقيم  $(RS)$ .

③ لنكن  $T$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B,4)$  و  $(D,3)$ . لما كانت  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,1)$  و  $(C,1)$ ، إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(T,7)$  و  $(I,2)$ ، وعلى الخصوص المستقيم  $(GI)$  يتقاطع مع  $(BD)$  في  $T$  وهي النتيجة المطلوبة.



نشاط 2 بعد نقطة عن مستو

نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(a, 0, 0)$  و  $B(0, b, 0)$  و  $C(0, 0, c)$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد موجبة تماماً. نهدف إلى إثبات علاقة بين بُعد  $O$  عن المستوي  $(ABC)$  والمسافات  $OA$  و  $OB$  و  $OC$ .

ⓐ. أثبت أن  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  معادلة للمستوي  $(ABC)$ .

ب. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $\Delta$  المار بالنقطة  $O$  عمودياً على المستوي  $(ABC)$ .

ⓑ. لتكن  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $\Delta$  مع المستوي  $(ABC)$ .

ا. احسب إحداثيات  $H$  بدلالة  $a$  و  $b$  و  $c$ .

ب. تحقق أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .

ج. نضع  $h = OH$  أثبت أن  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

### الحل

ⓐ. هذا تحقق مباشر إذ يكفي أن نتيقن أن إحداثيات النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة المعطاة. وليس هناك إلا مستو واحد يمر بهذه النقاط الثلاث لأنها ليست على استقامة واحدة.

ب. الناظم  $\vec{n}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$  على المستوي  $(ABC)$  هو شعاع توجيهه للمستقيم  $\Delta$  المار بالنقطة  $O(0,0,0)$  عمودياً على المستوي  $(ABC)$ . إذن يقبل  $\Delta$  التمثيل الوسيطى:  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}t, \frac{1}{b}t, \frac{1}{c}t\right); t \in \mathbb{R}$ .

ⓑ. إحداثيات  $H$  من الشكل  $\left(\frac{1}{a}t, \frac{1}{b}t, \frac{1}{c}t\right)$  حيث تتعين  $t$  بشرط انتماء  $H$  إلى المستوي  $(ABC)$  أي

بشرط تحقيق معادلته. ومنه  $1 = \frac{t}{a^2} + \frac{t}{b^2} + \frac{t}{c^2}$  ومنه  $t = t_0 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$  ومن ثم

$$H \left( \frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \right)$$

ⓑ. نلاحظ أن  $\vec{AH} = \left(\frac{t_0}{a} - a, \frac{t_0}{b}, \frac{t_0}{c}\right)$  و  $\vec{BC} = (0, -b, c)$ . إذن  $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$  فالمستقيم

$(AH)$  عمودي على  $(BC)$  وهو من ثم ارتفاع في المثلث  $ABC$ . ونبرهن بالمثل أن كلاً من  $(BH)$

و  $(CH)$  هو أيضاً ارتفاع في المثلث  $ABC$ . فالنقطة  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .

ⓑ. حساب  $h^2 = OH^2$ :

$$OH^2 = t_0^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = t_0$$

ومنه

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

## مُربعات ومساائل

1 ليكن  $ABCD$  رباعي الوجوه. وليكن  $\alpha$  عدداً حقيقياً، و  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[CD]$ . النقطتان  $E$  و  $F$  معرفتان بالعلاقيتين  $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$  و  $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$ . وأخيراً  $H$  هي منتصف  $[EF]$ .

- ① تحقق أن  $E$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-\alpha)$  و  $(D, \alpha)$ ، وكذلك أن النقطة  $F$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1-\alpha)$  و  $(C, \alpha)$ .
- ② أثبت أن  $H$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-\alpha)$  و  $(B, 1-\alpha)$  و  $(C, \alpha)$  و  $(D, \alpha)$ .
- $b$  استنتج وقوع النقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  على استقامة واحدة.

الحل

① لما كان

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{ED} + (1-\alpha)\overrightarrow{EA} &= \alpha(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) - \overrightarrow{AE} \\ &= \alpha\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{FC} + (1-\alpha)\overrightarrow{FB} &= \alpha(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) - \overrightarrow{BF} \\ &= \alpha\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}\end{aligned}$$

استنتجنا أن  $E$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-\alpha)$  و  $(D, \alpha)$ ، و  $F$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1-\alpha)$  و  $(C, \alpha)$ .

② لتكن  $H'$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-\alpha)$  و  $(B, 1-\alpha)$  و  $(C, \alpha)$  و  $(D, \alpha)$ . استناداً إلى ما سبق وإلى الخاصة التجميعية تكون  $H'$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(E, 1)$  و  $(F, 1)$  فهي إذن منتصف  $[EF]$  ومنه  $H' = H$ ، والنقطة  $H$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-\alpha)$  و  $(B, 1-\alpha)$  و  $(C, \alpha)$  و  $(D, \alpha)$ .

② استناداً إلى الخاصة التجميعية نفسها،  $H$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I, 2-2\alpha)$  و  $(J, 2\alpha)$ . إذن النقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة.

2 ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أن النقاط  $M$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع

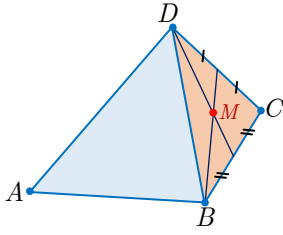
في مستو واحد، ثم وضع النقطة  $M$ .

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA} \quad ①$$

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC} \quad ②$$



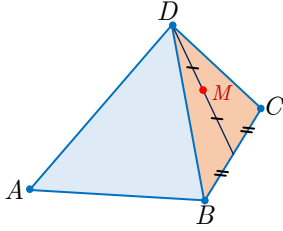
## الجل



الفكرة هي حذف النقطة  $A$  من الصيغة المعطاة.

① الصيغة المعطاة تكافئ  $\vec{MD} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$  وهذا يعني أنّ  $M$

هي مركز ثقل المثلث  $BCD$  وهي تقع في مستويه.



② الصيغة المعطاة تكافئ  $2\vec{MD} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$  أي إنّ  $M$  تقع في

منتصف المتوسط المرسوم من الرأس  $D$  في المثلث  $BCD$  وهي من ثمّ تقع في مستويه.

## 3

نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نُعطى النقطتين  $A(1,0,0)$  و  $B(4,3,-3)$ .

① أتكون مجموعة النقاط  $M$  مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-\alpha)$  و  $(B, \alpha)$  عندما

تتحولّ  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ ، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة  $A$  وشعاع توجيهه  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ؟

② أتكون مجموعة النقاط  $M$  مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-x-y)$  و  $(B, x)$  و  $(O, y)$

عندما تتحولّ  $x$  و  $y$  في  $\mathbb{R}$ ، هي نفسها المستوي المار بالنقطة  $O$  ويقبل  $\vec{i}$  و  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

شعاعي توجيهه؟

## الجل

① نلاحظ أنّ  $\vec{AB} = 3(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$  إذن المستقيم المار بالنقطة  $A$  وشعاع توجيهه  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  هو

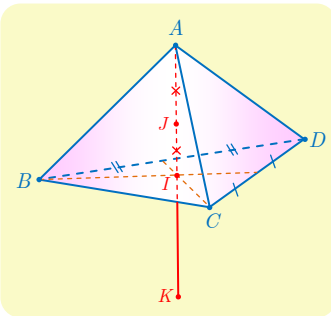
نفسه المستقيم  $(AB)$  وهو من ثمّ مجموعة النقاط  $M$  مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-\alpha)$  و  $(B, \alpha)$  عندما تتحولّ  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ . الجواب إذن هو نعم.

② استناداً إلى الملاحظة السابقة، المستوي المار بالنقطة  $O$  ويقبل  $\vec{i}$  و  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  شعاعي توجيهه،

هو نفسه المستوي المار بالنقطة  $O$  ويقبل  $\vec{OA}$  و  $\vec{AB}$  شعاعي توجيهه. هو إذن المستوي  $(OAB)$  وهو

من ثمّ مجموعة النقاط  $M$  مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 1-x-y)$  و  $(B, x)$  و  $(O, y)$  عندما

تتحولّ  $x$  و  $y$  في  $\mathbb{R}$ . الجواب إذن هو نعم.



## 4

ليكن  $ABCD$  رباعي الوجوه. وليكن  $I$  مركز ثقل المثلث

$BCD$ ، و  $J$  منتصف  $[AI]$  و  $K$  نظيرة  $A$  بالنسبة إلى  $I$ . عبّر

عن  $J$  و  $K$  بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $A$  و  $B$

و  $C$  و  $D$  بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

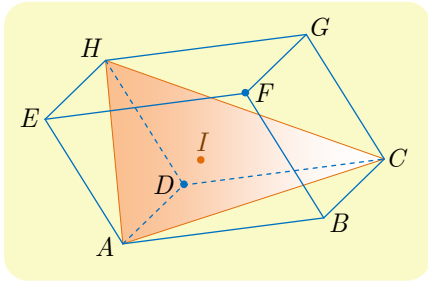
وهذه تكتب  $\overrightarrow{3JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$  بالاستفادة من علاقة شال. إذن  $J$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,3)$  و  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,1)$ . وبالمثل لدينا

$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب  $-\overrightarrow{3KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$  بالاستفادة من علاقة شال. إذن  $K$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,-3)$  و  $(B,2)$  و  $(C,2)$  و  $(D,2)$ .



## لنتعلم البحث معاً



### 5 الوقوع على استقامة واحدة

ليكن  $ABCDEFGH$  متوازي سطوح، وليكن  $I$  مركز ثقل المثلث  $AHC$ . أثبت أن النقاط  $D$  و  $I$  و  $F$  تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع  $I$  على  $[DF]$ .

### نحو الحل

الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي محاولة إيجاد ثابت  $k$  يحقق  $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DF}$ ، يبدو هذا صعباً للوهلة الأولى، ومنه تأتي الفكرة المعتادة القائمة على تحليل أحد هذه الأشعة أو جميعها والاستفادة من علاقة شال. أثبت انطلاقاً من تعريف  $I$  أن

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$$

ولكن  $ABCDEFGH$  متوازي سطوح. استفد من ذلك لتبرهن أن

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$$

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

## طريقة ثانية :

يمكننا أيضاً التفكير بطريقة تحليلية. لإثبات الوقوع على استقامة واحدة لا نحتاج إلى معلم متجانس. لذلك نتأمل المعلم  $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ .

1. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(DF)$ .

2. احسب إحداثيات النقطة  $I$ .

3. تحقق أن  $I$  تقع على المستقيم  $(DF)$  وعين قيمة  $t$  التي تحقق  $\overrightarrow{DI} = t\overrightarrow{DF}$ .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



النقطة  $I$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(C,1)$  و  $(H,1)$  إذن مهما كانت النقطة  $M$  في الفراغ كان  $3\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MH}$ ، وبوجه خاص في حالة  $M = D$  نجد

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}$$

إذ استفدنا من كون  $ABCDEFHG$  متوازي سطوح لنستنتج أن  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ ، وهذا يبرهن أن النقاط  $D$  و  $I$  و  $F$  تقع على استقامة واحدة، وأن  $I$  نقطة من القطعة المستقيمة  $[DF]$  تحقق  $DI = \frac{1}{3}DF$ .

## طريقة ثانية :

في المعلم المعطى لدينا  $A(1,0,0)$  و  $C(0,1,0)$  و  $H(0,0,1)$  و  $F(1,1,1)$ . أما التمثيل الوسيطي للمستقيم  $(DF)$  فهو  $(x,y,z) = (t,t,t), t \in \mathbb{R}$ . ومن جهة أخرى إحداثيات النقطة  $I$  مركز ثقل المثلث  $(ACH)$  هي  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . فهي إذن النقطة من المستقيم  $(DF)$  الموافقة للوسيط  $t = \frac{1}{3}$ ، والنقاط  $D$  و  $I$  و  $F$  تقع على استقامة واحدة، ونجد مجدداً  $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$ .

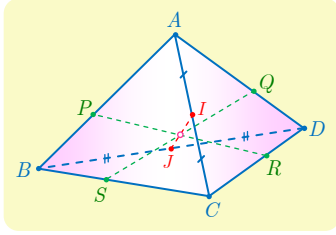
## 6 تعيين نقطة تلاقي مستقيمتين

نتأمل رباعي وجوه  $ABCD$ . لتكن  $x$  من  $]0,1[$ ، ولتكن  $P$  و  $Q$  و  $R$  و  $S$  النقاط التي تحقق

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان  $I$  و  $J$  هما منتصفا الحرفين  $[AC]$  و  $[BD]$ . أثبت تلاقي المستقيمتين  $(IJ)$  و  $(PR)$  و  $(QS)$  في نقطة واحدة.



## نحو الحل

نعرف فعالية الخاصة التجميعية في حل مسائل التلاقي، وفرضيات مثل  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$  تعني أن  $P$  هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين  $A$  و  $B$ .

1. بين أن  $P$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(B, x)$ .

2. عبّر بالمثل عن النقاط  $Q$  و  $R$  و  $S$ .

تأمل إذن النقطة  $G$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط  $(A, 1-x)$  و  $(C, 1-x)$  و  $(B, x)$  و  $(D, x)$ .

1. أثبت استناداً إلى الخاصة التجميعية أن  $G$  تقع على كل من القطع المستقيمة  $[PR]$

و  $[QS]$  و  $[IJ]$ .

2. ماذا تستنتج؟

أنجز الحل وكتبه بلغة سليمة.

الحل

في الحقيقة

$$\overrightarrow{xPB} + (1-x)\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP} + x(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = -\overrightarrow{AP} + x\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

▪ إذن  $P$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(B, x)$ .

▪ ونجد بالمثل أن  $Q$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(D, x)$ .

▪ و  $R$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(C, 1-x)$  و  $(D, x)$ .

▪ وأخيراً  $S$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(C, 1-x)$  و  $(B, x)$ .

يلخص الشكل المجاور هذه النتائج.

استناداً إلى الخاصة التجميعية،  $G$  هي مركز الأبعاد متناسبة

$$\begin{array}{ccc} (A, 1-x) & - Q - & (D, x) \\ P & & R \\ (B, x) & - S - & (C, 1-x) \end{array}$$

لكل من  $(P, 1)$  و  $(R, 1)$ ، أي هي منتصف  $[PR]$ .

ومن جهة أخرى  $G$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(Q, 1)$  و  $(S, 1)$  فهي أيضاً تقع في منتصف

$[SQ]$ . وأخيراً لأن  $I$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(C, 1-x)$ ، وكذلك  $J$  هي

مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين  $(B, x)$  و  $(D, x)$ ، استنتجنا أن  $G$  هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين

$(I, 2-2x)$  و  $(J, 2x)$ . فالنقطة  $G$  تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة  $[IJ]$ .

نستنتج مما سبق أن  $G$  نقطة تلاقي القطع المستقيمة  $[IJ]$  و  $[PR]$  و  $[SQ]$ ، فالمستقيمات  $(IJ)$

و  $(PR)$  و  $(QS)$  تتلاقى في نقطة واحدة.



### قُدماً إلى الأمام

7 نأمل رباعي وجوه  $ABCD$ .  $K$  نقطة من  $[AB]$  تحقق  $AK = \frac{1}{3}AB$ ، و  $L$  نقطة من

القطعة المستقيمة  $[CD]$  تحقق  $CL = \frac{2}{3}CD$ . وأخيراً  $I$  هي منتصف  $[AD]$ ، و  $J$  هي منتصف

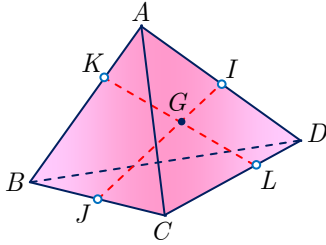
$[BC]$ . نعرّف  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,2)$  و  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,2)$ .

1. أثبت أنّ النقاط  $G$  و  $I$  و  $J$  تقع على استقامة واحدة.

2. أثبت أنّ النقاط  $G$  و  $K$  و  $L$  تقع على استقامة واحدة.

3. استنتج وقوع النقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  و  $L$  في مستوي واحد.

الحل



1.  $I$  منتصف  $[AD]$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,2)$  و  $(D,2)$  وكذلك  $J$  منتصف  $[BC]$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B,1)$  و  $(C,1)$ . إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I,4)$  و  $(J,2)$ . فالنقاط  $G$  و  $I$  و  $J$  تقع على استقامة واحدة.

وبالمثل  $K$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A,2)$  و  $(B,1)$ . وكذلك  $L$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D,2)$  و  $(C,1)$ . إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(K,3)$  و  $(L,3)$ . فالنقاط  $G$  و  $K$  و  $L$  تقع على استقامة واحدة.

2. المستقيمان  $(KL)$  و  $(IJ)$  متقاطعان في  $G$  فهما يعينان مستويًا واحدًا، ومن ثمّ تقع النقاط  $K$  و  $I$  و  $J$  و  $L$  في مستوي واحد.

8 نأمل رباعي وجوه  $ABCD$ . والنقاط  $P$  و  $Q$  و  $R$  هي نقاط تجعل  $ABPC$  و  $ABQD$  و

$ACRD$  متوازيات أضلاع. نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات  $(DP)$  و  $(CQ)$  و  $(BR)$ .

1. أثبت أنّ النقطة  $P$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,-1)$  و  $(B,1)$  و  $(C,1)$ .

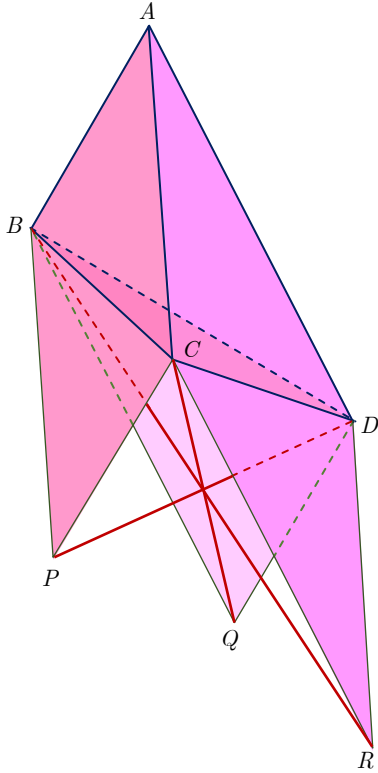
2. عبّر بالمثل عن  $Q$  بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $A$  و  $B$  و  $D$ . وكذلك، عبّر عن  $R$

بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $A$  و  $C$  و  $D$ .

3. بالاستفادة من نقطة  $I$ ، وهي مركز أبعاد متناسبة مُختارة للنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ ، ومن

الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات  $(DP)$  و  $(CQ)$  و  $(BR)$ ، وعيّن موقع  $I$  على

هذه المستقيمات.



① متوازي الأضلاع  $ABPC$   $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ،

وهذه تكتب  $(1+1-1)\overrightarrow{AP} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC} - 1\overrightarrow{AA}$

إذن  $P$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقّلة  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(A,-1)$ .

ونجد بالمثل أنّ  $Q$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

المنقّلة  $(B,1)$  و  $(D,1)$  و  $(A,-1)$ . وأنّ  $R$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقّلة  $(D,1)$  و  $(C,1)$  و  $(A,-1)$ .

② لتكن  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقّلة

$(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,1)$  و  $(A,-1)$ . نستنتج استناداً

إلى الخاصة التجميعية أنّ

▪  $I$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D,1)$  و  $(P,1)$  أي منتصف  $[PD]$ .

▪ وكذلك  $I$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(Q,1)$  و  $(C,1)$  أي منتصف  $[QC]$ .

▪ وأخيراً  $I$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(R,1)$  و  $(B,1)$  أي منتصف  $[RB]$ .

والمستقيمات  $(DP)$  و  $(CQ)$  و  $(BR)$  تتلاقى في نقطة واحدة هي النقطة  $I$  التي تقع في منتصف كل

من القطع المستقيمة  $[PD]$  و  $[QC]$  و  $[RB]$ .

9 نتأمل ثلاث نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  من الفراغ، وعدداً حقيقياً  $k$  من المجال  $[-1,1]$ . ترمز  $G_k$  إلى

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A;k^2+1)$  و  $(B;k)$  و  $(C;-k)$ .

① مثل النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[BC]$ ، وأنشئ النقطتين  $G_1$

و  $G_{-1}$ .

②  $a$ . أثبت أنّه مهما كان العدد  $k$  من  $[-1,1]$  كان  $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$

$b$ . ادرس تغيرات التابع  $f$  المعرّف على المجال  $[-1,1]$  بالصيغة  $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$

$c$ . استنتج مجموعة النقاط  $G_k$  عندما تتحوّل  $k$  في المجال  $[-1,1]$ .

③ عيّن المجموعة  $\mathcal{E}$  المكوّنة من النقاط  $M$  التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

④ عيّن المجموعة  $\mathcal{F}$  المكوّنة من النقاط  $M$  التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

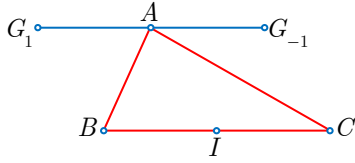
⑤ نزوّد الفضاء بمعلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . ونفترض أنّ النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  معطاة كما يأتي:

$A(0, 0, 2)$  و  $B(-1, 2, 1)$  و  $C(-1, 2, 5)$ ، وأنّ  $G_k$  و  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$  معرفة كما في السابق.

a. احسب إحداثيات النقطتين  $G_1$  و  $G_{-1}$ ، وأثبت أنّ المجموعتين  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$  متقاطعتان.

b. احسب نصف قطر الدائرة  $\Gamma$  الناتجة من تقاطع المجموعتين  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$ .

الحل



① لأنّ  $2\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$  ومنه  $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{CI}$  وبالمثل  $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{CI}$ . الشكل المجاور يوضّح توضع هذه النقاط.

② a. استناداً إلى تعريف  $G_k$  لدينا

$$(1 + k^2)\overrightarrow{AG_k} = (1 + k^2)\overrightarrow{AA} + k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = -k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -k\overrightarrow{BC}$$

ومنه العلاقة المطلوبة.

$x$	-1	+1
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

② b. التابع  $f$  مستمرّ واشتقاقي على المجال  $[-1, 1]$  ومشتقه

$$f'(x) = -\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

سالِبٌ على مجال الدراسة فللتابع  $f$  جدول

التغيرات المبيّن جانباً.

② c. نستنتج من الدراسة السابقة أنّه عندما ترسم  $k$  المجال  $[-1, 1]$  يرسم  $f(k)$  المجال  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

والنقطة  $G_k$  ترسم القطعة المستقيمة  $[G_{-1}G_1]$ .

③ استناداً إلى تعريف  $G_1$  و  $G_{-1}$  لدينا

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MG_{-1}} &= 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ 2\overrightarrow{MG_1} &= 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \end{aligned}$$

إذن تنتمي  $M$  إلى  $\mathcal{E}$  إذا وفقط إذا تحقّق الشرط  $MG_1 = MG_{-1}$  أي إذا وفقط إذا انتمت  $M$  إلى

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[G_1G_{-1}]$ . ومنه  $\mathcal{E}$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة

$[G_1G_{-1}]$ .

④ استناداً إلى تعريف  $G_1$  لدينا  $2\overrightarrow{MG_1} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ ، ومن جهة أخرى لدينا

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{IA}$$

إذن تنتمي  $M$  إلى  $\mathcal{F}$  إذا وفقط إذا تحقّق الشرط  $MG_1 = IA$  أي إذا وفقط إذا انتمت  $M$  إلى الكرة

التي مركزها  $G_1$  ونصف قطرها يساوي  $IA$ . ومنه  $\mathcal{F}$  هي الكرة التي مركزها  $G_1$  وتمر بالنقطة  $B$ . لأنّ

$$\overrightarrow{BG_1} = \overrightarrow{IA}$$

⑤  $G_1$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,2), (B,1), (C,-1)$  ومنه

$$\begin{bmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن  $G_1(0,0,0)$ ، وبالمثل نجد  $G_{-1}(0,0,4)$ .

ونحسب  $G_1B = \sqrt{6}$  و  $G_1A = 2$ . لما كانت  $A$  تقع في منتصف القطعة المستقيمة  $[G_1G_{-1}]$  استنتجنا أنه تنتمي إلى  $\mathcal{E}$  ولأن  $G_1A < G_1B$  استنتجنا أن  $A$  تقع داخل الكرة  $\mathcal{F}$ ، إذن المستوي  $\mathcal{E}$  والكرة  $\mathcal{F}$  يتقاطعان.

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[G_1G_{-1}]$  هي  $z = 2$  وهو يبعد عن مركز الكرة  $\mathcal{F}$  مسافة تساوي 2، ولما كان نصف قطر الكرة يساوي  $\sqrt{6}$  استنتجنا استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث أن نصف قطر الدائرة التي تمثل  $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$  يساوي  $\sqrt{6 - 2^2} = \sqrt{2}$ .

⑩ نتأمل معلماً متجانساً  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ . ليكن  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

① احسب إحداثيات  $G$ ، وتحقق أن  $(OG)$  عمودي على  $(ABC)$ .

② تعرّف النقاط  $A'(2,0,0)$  و  $B'(0,2,0)$  و  $C'(0,0,3)$  المستوي  $(A'B'C')$ .

a. اكتب معادلة للمستوي  $(A'B'C')$ .

b. أثبت أن  $M(x,y,z)$  تنتمي إلى المستقيم  $(AC)$  إذا وُجد عدد  $k$  بحيث  $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$ .

c. احسب إحداثيات النقطة  $K$  المشتركة بين المستقيم  $(AC)$  والمستوي  $(A'B'C')$ .

③ a. احسب إحداثيات النقطة  $L$  المشتركة بين المستقيم  $(BC)$  والمستوي  $(A'B'C')$ .

b. أثبت توازي المستقيمتين  $(AB)$  و  $(A'B')$  و  $(KL)$ .

④ عيّن تقاطع المستويين  $(ABC)$  و  $(A'B'C')$  بدلالة النقاط المعروفة سابقاً.

الحل

① لأن  $A(1,0,0)$  و  $B(0,1,0)$  و  $C(0,0,1)$  استنتجنا أن  $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . ونحسب

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

إذن  $\overrightarrow{OG}$  عمودي على شعاعين موجّهين للمستوي  $(ABC)$  فالمستقيم  $(OG)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$ .



②  $a$ . معادلة المستوي  $(A'B'C')$  من الشكل  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ،  
فإحداثيات النقاط  $A'(2, 0, 0)$  و  $B'(0, 2, 0)$  و  $C'(0, 0, 3)$  تحقق هذه المعادلة ومنه نجد  $2a + d = 0$   
و  $2b + d = 0$  و  $3c + d = 0$ . إذن  $d(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z + 1) = 0$ ، ولكن  $d = 0$  يقتضي أنّ  
يكون  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  وهذا خُلْفٌ، فلا بد أن يكون  $d \neq 0$  ويمكننا الاختصار عليه لنجد معادلة  
المستوي  $(A'B'C')$  كما يأتي:  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$ .

②  $b$ . لما كان  $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$  شعاعاً موجهاً للمستقيم  $(AC)$  الذي يمر بالنقطة  $A(1, 0, 0)$  استنتجنا  
كون  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$  أنّ

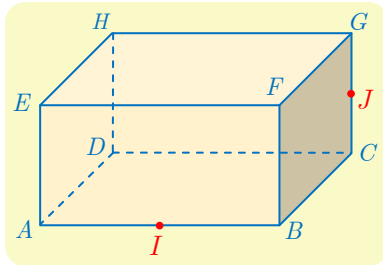
$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}; \quad k \in \mathbb{R}$$

②  $c$ . تنتمي  $K(1 - k, 0, k)$  من المستقيم  $(AC)$  إلى المستوي  $(A'B'C')$  إذا حققت إحداثياتها  
معادلته، أي إذا كان  $k = -3$ . فإحداثيات  $K$  هي  $(4, 0, -3)$ .

③  $a$ . نحسب  $L$  بأسلوب مماثل لحساب  $K$  فنجد  $L(0, 4, -3)$

③  $b$ . نجد  $\overrightarrow{KL} = (-4, 4, 0) = 4\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A'B'}$  فالمستقيمت  $(AB)$  و  $(A'B')$  و  $(KL)$  متوازية.

④ لدينا  $K \in (A'B'C')$  و  $K \in (AC) \subset (ABC)$  إذن  $K$  تقع على الفصل المشترك للمستويين  
 $(A'B'C')$  و  $(ABC)$ . وكذلك لدينا  $L \in (BC) \subset (ABC)$  و  $L \in (A'B'C')$  إذن  $L$  تقع على  
الفصل المشترك للمستويين  $(A'B'C')$  و  $(ABC)$ . فالمستقيم  $(KL)$  هو الفصل المشترك للمستويين  
 $(A'B'C')$  و  $(ABC)$ .



11 ليكن  $ABCDEFGH$  متوازي مستطيلات فيه  $AB = 2$

و  $BC = GC = 1$ . النقطة  $I$  هي منتصف  $[AB]$  و  $J$  هي  
منتصف  $[CG]$ .

نتأمل المعلم المتجانس  $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

① احسب المسافتين  $DJ$  و  $IJ$ .

② أثبت أنّ المستقيمين  $(DI)$  و  $(IJ)$  متعامدان. واحسب  $\widehat{IJD}$ .

③  $a$ . أعط معادلة للمستوي  $(DIJ)$ .

$b$ . احسب بُعد  $H$  عن المستوي  $(DIJ)$ .

④ احسب حجم رباعي الوجوه  $HDIJ$ .

⑤  $a$ . أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  المار بالنقطة  $J$  عمودياً على المستوي  $(HDI)$ .

$b$ . احسب إحداثيات النقطة  $J'$  نقطة تقاطع المستقيم  $d$  والمستوي  $(HDI)$ .

$c$ . جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة  $J$  عن المستوي  $(HDI)$ .

① هنا  $I(1,0,0)$  و  $D(0,1,0)$  و  $J(2,1,\frac{1}{2})$  إذن  $IJ = \frac{3}{2}$  و  $DJ = \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

② من الواضح أن  $DI = \sqrt{2}$  ومنه  $DI^2 + IJ^2 = DJ^2$  فالمثلث  $DIJ$  قائم في  $I$ ، والمستقيمان

$(DI)$  و  $(IJ)$  متعامدان. ونحسب  $\cos \widehat{IJD} = \frac{IJ}{JD} = \frac{3}{\sqrt{17}}$ .

③  $a$  تنتمي  $M(x,y,z)$  إلى المستوي  $(DIJ)$  إذا وفقط إذا وجد عدنان  $s$  و  $t$  بحيث

$$\vec{IM} = t\vec{ID} + s\vec{IJ}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} x-1 = -t+s \\ y = t+s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية وتعويض قيمة  $s$  من الثالثة نجد  $x + y - 4z - 1 = 0$  وهي معادلة المستوي  $(DIJ)$ .

ويمكن بطريقة ثانية، أن نقول إن معادلة المستوي المنشود هي من الشكل  $ax + by + cz + d = 0$ ، حيث الأعداد  $(a,b,c) \neq (0,0,0)$  ولأنه يمر بالنقاط  $I$  و  $D$  و  $J$  فإحداثياتها تحقق معادلته ومنه

$$a + d = 0 \quad \text{و} \quad b + d = 0 \quad \text{و} \quad 2a + b + \frac{1}{2}c + d = 0$$

ومنه  $a = b = -d$  و  $c = 4d$ .

إذن  $x + y - 4z - 1 = 0$  لأن  $d \neq 0$  (وإلا كان  $(a,b,c) = (0,0,0)$ ).

③  $b$  إحداثيات  $H$  هي  $(0,1,1)$  إذن

$$\text{dist}(H,(DIJ)) = \frac{|0 + 1 - 4 \times 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

④ حجم رباعي الوجوه  $HDIJ$  يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته  $DIJ$  أي  $\frac{1}{2}DI \cdot IJ$  (لأنّ

المثلث قائم) بارتفاعه الذي يساوي  $\text{dist}(H,(DIJ))$ . إذن

$$\mathcal{V}(HDIJ) = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} \right) \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

⑤  $a$  لنبحث عن شعاع توجيه  $(\alpha, \beta, \gamma)$  للمستقيم  $d$  المنشود. هذا الشعاع عمودي على كل من

$\vec{DH} = (0,0,1)$  و  $\vec{DI} = (1,-1,0)$ . إذن  $\gamma = 0$  و  $\alpha - \beta = 1$ . فيمكن مثلاً أن نأخذ  $(1,1,0)$

شعاعاً موجهاً للمستقيم العمودي على المستوي  $(HDI)$ ، ولأنّ  $d$  يمر بالنقطة  $J$  استنتجنا أنّ التمثيل

الوسيطي المنشود هو

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t; \\ z = 1/2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

⑤ *b.* معادلة المستوي (*HDI*) هي  $x + y = 1$  لأن إحداثيات النقاط  $I(1,0,0)$  و  $D(0,1,0)$  و  $H(0,0,1)$  غير الواقعة على استقامة واحدة تحقق وضوحاً هذه المعادلة. وعليه إذا كانت إحداثيات  $J'$  هي  $(x, y, z)$  استنتجنا أن  $(x = 2 + t, y = 1 + t, z = \frac{1}{2})$  حيث تتعين  $J'$  بشرط الانتماء إلى (*HDI*) أي يجب أن يكون  $1 = x + y = 3 + 2t$  أو  $t = -1$ ، ومنه  $J'(1, 0, \frac{1}{2})$ .

⑤ *c.* الطريقة الأولى:  $\text{dist}(J, (HDI)) = JJ' = \sqrt{2}$ .

الطريقة الثانية: لما كانت معادلة المستوي (*HDI*) هي  $x + y = 1$  و  $J(2, 1, \frac{1}{2})$  كان

$$\text{dist}(J, (HDI)) = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

الطريقة الثالثة: مساحة المثلث القائم *HDI* تساوي  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  إذن حجم الهرم *HDIJ* يساوي

$$\frac{1}{3} = \mathcal{V}(HDIJ) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(HDI) \times \text{dist}(J, (HDI))$$

فنجد مجدداً أن  $\text{dist}(J, (HDI)) = \sqrt{2}$ .

12 في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل الهرم *S-OABC* حيث  $\vec{OA} = \vec{i}$  و  $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$  و  $\vec{OC} = \vec{j}$  و  $\vec{OS} = \vec{k}$ ، وليكن  $t$  عدداً يحقق  $0 < t < 1$ . نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي  $\mathcal{P}$  الذي معادلته  $x + y = t$ ، وتعيين قيمة  $t$  التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

① *a.* يقطع المستوي  $\mathcal{P}$  المستقيمات (*OA*) و (*OC*) و (*SC*) و (*SB*) و (*SA*) في *D* و *E* و *F* و *G* و *H* بالترتيب. ارسم شكلاً وبيّن طبيعة هذا المقطع.

*b.* أثبت أن الرباعي *DEFH* مستطيل، وعبر عن مساحته بدلالة  $t$ .

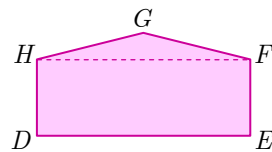
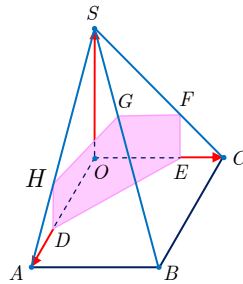
*c.* احسب إحداثيات النقطة *G*، ثم مساحة المثلث *FGH* بدلالة  $t$ .

*d.* استنتج عبارة  $\mathcal{A}(t)$  مساحة المقطع المنشود بدلالة  $t$ .

② ادرس اطراد  $\mathcal{A}$  على المجال  $]0, 1[$ ، واستنتج قيمة  $t$  التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

③ استنتج أن المستوي المار بمركز ثقل المثلث *OAC* ويقبل  $\vec{AC}$  و  $\vec{OS}$  شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

الحل



① *a.* المقطع شكل خماسي مبين في الشكل المجاور:

*b.* من السهل تعيين إحداثيات *D* و *E* إذ نجد  $D(t, 0, 0)$  و  $E(0, t, 0)$ ، ولأن المستوي  $\mathcal{P}$  يوازي (*Oz*)، فإن كل من (*EF*) و (*DH*) يوازي (*Oz*) وكل من المثلثين *ECF* و *DAH* قائم ومتساوي الساقين.

إذن  $\overrightarrow{EF} = (1-t)\vec{k} = \overrightarrow{DH}$  ، ولدينا وضوحاً  $\overrightarrow{DE} \perp \vec{k}$  إذن  $DEFH$  مستطيل. ولما كان  $DE = \sqrt{2}t$  استنتجنا أن مساحة المستطيل  $DEFH$  تساوي  $\sqrt{2}t(1-t)$ .

c. يقبل المستقيم  $(SB)$  الشعاع  $\overrightarrow{SB} = (1,1,-1)$  شعاعاً موجّهاً، ومن ثم يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  يحقق  $\overrightarrow{SG} = \alpha\overrightarrow{SB}$  أي  $G(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$ ، ولكن النقطة  $G$  تنتمي أيضاً إلى  $\mathcal{P}$ ، فهي تحقق معادلة  $\mathcal{P}$ ، أي  $2\alpha = t$  ومنه  $G(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1-\frac{t}{2})$ ، ولدينا  $F(0, t, 1-t)$  و  $H(t, 0, 1-t)$  فالمثلث  $HFG$  مثلث متساوي الساقين طول قاعدته  $\sqrt{2}t$  وارتفاعه  $\frac{t}{2}$ . إذن مساحة  $EGH$  تساوي  $\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$ .

d. نستنتج أن مساحة المقطع  $DEFGH$  تعطى بالصيغة

$$A(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + \sqrt{2}t(1-t) = \frac{\sqrt{2}}{4}(4t - 3t^2)$$

② نجد بسهولة أن للتابع  $A$  جدول الاطراد الآتي على  $]0,1[$  :

$t$	0	$\frac{2}{3}$	1
$A'(t)$		+	-
$A(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

فمساحة المقطع  $DEFGH$  تبلغ قيمة عظمى عند  $t = \frac{2}{3}$  وهي تساوي  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

③ ليكن  $\mathcal{Q}$  المستوي الذي يقبل الشعاعين  $\overrightarrow{CA}$  و  $\overrightarrow{OS}$  شعاعياً توجيهه، ويمر بمركز ثقل المثلث  $OAC$  أي النقطة  $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .

الشعاع  $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$  عمودي على كل من  $\overrightarrow{CA} = \vec{i} - \vec{j}$  و  $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$ . إذن شعاع  $\overrightarrow{OB}$  ناظم على المستوي  $\mathcal{Q}$ . فمعادلة هذا المستوي من الشكل  $x + y = d$ ، ويتعين  $d$  من شرط مرور هذا المستوي بالنقطة  $M$  إذن  $d = \frac{2}{3}$ . إذن معادلة  $\mathcal{Q}$  هي  $x + y = \frac{2}{3}$  فهو تحديداً المستوي  $\mathcal{P}$  الموافق لقيمة  $t = \frac{2}{3}$  التي تجعل مساحة المقطع أعظمية، وهي النتيجة المطلوب إثباتها.

# 4

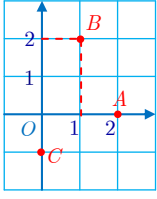
## الأعداد العقدية

- 1 مجموعة الأعداد العقدية
- 2 مرافق عدد عقدي
- 3 الشكل المثلثي لعدد عقدي
- 4 خواص طويلة عدد عقدي ونراووته
- 5 الشكل الأسّي لعدد عقدي
- 6 المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الأعداد العقدية، والعمليات عليها.
- مرافق عدد عقدي وزاويته وطويلته.
- الأشكال الجبرية والمثلثية والأسية للأعداد العقدية، والانتقال من شكل إلى آخر.
- الجذور التربيعية للأعداد العقدية.
- حلّ المعادلات من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد العقدية.

## تَدْرِبْ صَفحة 105



① ليكن  $x$  عدداً عقدياً تمثله نقطة  $M$  في المستوي. وليكن  $z_1 = 2 + xi$  و  $z_2 = 3 + x + 4i$ . اكتب  $z_2$  و  $z_1$  بالشكل الجبري في حالة  $M = A$  أو  $M = B$  أو  $M = C$  حيث  $A$  و  $B$  و  $C$  مبينة في الشكل المجاور.

- عندما  $M = A$  يكون  $x = 2$  ومنه  $z_1 = 2 + 2i$  و  $z_2 = 5 + 4i$ .
- عندما  $M = B$  يكون  $x = 1 + 2i$  ومنه  $z_1 = i$  و  $z_2 = 4 + 6i$ .
- عندما  $M = C$  يكون  $x = -i$  ومنه  $z_1 = 3$  و  $z_2 = 3 + 3i$ .

② في حالة عدد عقدي  $z$  نضع  $P(z) = z^3 - (1 - i)z^2 - (4 - 5i)z + (4 + 6i)$ . احسب كلاً من  $P(i)$  و  $P(-2)$  و  $P(3 - 2i)$ .

**الحل**

هنا الحساب يعطينا  $P(i) = 0$  و  $P(-2) = 0$ ، ويمكن للطالب حساب  $P(3 - 2i)$  بالتعويض مباشرة وسيجد أنّ  $P(3 - 2i) = 0$  ولكنّ الحساب طويل. الفكرة المفيدة هي أن نتذكّر أنّ  $P(i) = 0$  تعني أنّ كثير الحدود يقبل القسمة الإقليدية على  $(z - i)$  وكذلك فإنّ  $P(-2) = 0$  تعني أنّه يقبل القسمة على  $(z + 2)$ ، ولأنّ  $P$  من الدرجة الثالثة، استنتجنا وجود عددين  $\lambda$  و  $\mu$  بحيث

$$P(z) = (z - i)(z + 2)(\lambda z + \mu)$$

بمقارنة أمثال  $z^3$  في الطرفين نجد  $\lambda = 1$ ، والحددين الثابتين (الخاليين من  $z$ ) نجد  $-2i\mu = 4 + 6i$  ومنه  $\mu = -3 + 2i$  إذن  $P(z) = (z - i)(z + 2)(z - 3 + 2i)$ ، وعليه  $P(3 - 2i) = 0$ .

**مثال:** ليكن  $Q(z) = 2z^3 - (5 - 4i)z^2 + (1 - 7i)z + (2 + 3i)$ . احسب كلاً من  $Q(1)$  و  $Q(-i)$  و  $Q(2 - i)$ .

③ بسّط العبارتين:

$$z = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} + \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i} \quad ①$$

$$.w = (1 + i)^8 \quad ②$$

**الحل**

$$z = \frac{2}{3} \quad ①$$

$$.w = 16 \quad ② \text{ ولأنّ } (1 + i)^2 = 2i \text{ استنتجنا أنّ } (1 + i)^8 = 16$$

④ أعط الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

$$\begin{array}{ll} z_2 = (1+i)^2 & \textcircled{2} \quad z_1 = (2+i)(3-2i) & \textcircled{1} \\ z_4 = (1+2i)(1-2i) & \textcircled{4} \quad z_3 = (1-i)^2 & \textcircled{3} \\ z_6 = (4-3i)^2 & \textcircled{6} \quad z_5 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5}) & \textcircled{5} \\ z_8 = \frac{1}{2-i} & \textcircled{8} \quad z_7 = \frac{4-6i}{3+2i} & \textcircled{7} \\ z_{10} = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) & \textcircled{10} \quad z_9 = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i} & \textcircled{9} \end{array}$$

الحل

لكتابة عدد عقدي  $z = \frac{a+ib}{c+id}$  بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بالعدد  $c-id$

$$z = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

$$\begin{array}{ll} z_2 = 2i & \textcircled{2} \quad z_1 = 8-i & \textcircled{1} \\ z_4 = 5 & \textcircled{4} \quad z_3 = -2i & \textcircled{3} \\ z_6 = 7-24i & \textcircled{6} \quad z_5 = 14 & \textcircled{5} \\ z_8 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i & \textcircled{8} \quad z_7 = -2i & \textcircled{7} \\ z_{10} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i & \textcircled{10} \quad z_9 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i & \textcircled{9} \end{array}$$

## تَدْرِبْ صفحة 107

① اكتب بدلالة  $\bar{z}$  مرافق كل من الأعداد العقدية  $Z$  الآتية:

$$\begin{array}{ll} Z = \frac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i} & \textcircled{2} \quad Z = (z-1)(z+i) & \textcircled{1} \\ Z = (1+2iz)^3 & \textcircled{4} \quad Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i & \textcircled{3} \end{array}$$

الحل

$$\begin{array}{ll} \bar{Z} = \frac{3\bar{z}^2 + 2i\bar{z} + 4}{2\bar{z} + 3i} & \textcircled{2} \quad \bar{Z} = (\bar{z}-1)(\bar{z}-i) & \textcircled{1} \\ \bar{Z} = (1-2i\bar{z})^3 & \textcircled{4} \quad \bar{Z} = \bar{z}^3 - 2i\bar{z}^2 + 1 + 3i & \textcircled{3} \end{array}$$

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول  $z$ :

$$\begin{array}{ll} 2iz + \bar{z} = 3 + 3i & \textcircled{2} \quad z - 2\bar{z} = 2 & \textcircled{1} \\ \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i & \textcircled{4} \quad 2\bar{z} = i-1 & \textcircled{3} \end{array}$$



## الحل

- 1 بأخذ مرافق طرفي المساواة  $z - 2\bar{z} = 2$  نجد  $z - 2z = 2$ ، ثم بتعويض  $\bar{z}$  من الأخيرة في الأولى  
 نجد  $z = -2$  ومنه  $z - 2(2z + 2) = 2$   
 2 بأسلوب مماثل للحالة السابقة نجد  $z = 1 - i$   
 3 خذ مرافق الطرفين لتجد  $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$   
 4 احسب  $\bar{z}$  ثم استنتج أن  $z = -i$

## تَدْرِبْ صفحة 110

- 1 مثل الأعداد الآتية في المستوي العقدي، ثم أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$$1 + i, -1 - i, 5, -3, 3i, 4 - 4i, -5i, 3 + 3i$$

## الحل

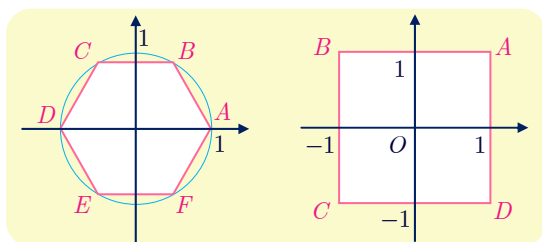
$z$	$1 + i$	$-1 - i$	$5$	$-3$	$3i$	$4 - 4i$	$-5i$	$3 + 3i$
$\theta$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$0$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

- 2 اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 + 2i\sqrt{3} & \text{2} & & z_1 &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2} & \text{1} \\ z_4 &= -2i & \text{4} & & z_3 &= 4 - 4i & \text{3} \\ z_6 &= \frac{4}{1 - i} & \text{6} & & z_5 &= -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} & \text{5} \end{aligned}$$

## الحل

$$\begin{aligned} z_2 &= 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & \text{2} & & z_1 &= 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) & \text{1} \\ z_4 &= 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) & \text{4} & & z_3 &= 4\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) & \text{3} \\ z_6 &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) & \text{6} & & z_5 &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) & \text{5} \end{aligned}$$



- 3 في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس مربعاً  $ABCD$  ومسدساً  $ABCDEF$ . أعط الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كلٍّ منهما.

## الجل

في المربع :  $z_A = 1 + i, z_B = -1 + i, z_C = -1 - i, z_D = 1 - i$

في المسدّس:

$$z_A = 1, z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_C = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_D = -1, z_E = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_F = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

④ في كل من الحالات الآتية، عين مجموعة النقاط  $M$  التي يحقق العدد العقدي  $z$  الذي يمثلها

الشرط المعطى:

$$\begin{array}{ll} \arg z = -\frac{2\pi}{3} & \text{②} & \arg z = \frac{\pi}{3} & \text{①} \\ |z| = 3 & \text{④} & \arg z = \pi & \text{③} \\ \operatorname{Im}(z) = 1 & \text{⑥} & \operatorname{Re}(z) = -2 & \text{⑤} \end{array}$$

## الجل

① نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها  $\frac{\pi}{3}$  مع محور الفواصل.

② نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها  $-\frac{2\pi}{3}$  مع محور الفواصل.

③ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

④ دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 3.

⑤ مستقيم يوازي محور الترتيب ويمر بالنقطة التي إحداثياتها  $(-2, 0)$ .

⑥ مستقيم يوازي محور الفواصل ويمر بالنقطة التي إحداثياتها  $(0, 1)$ .

## تَدْرِبْ صَفِيحة 113

I. ① اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية:

$$z = \left( \frac{\sqrt{3} - i}{i} \right)^5 \quad \text{③} \quad z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} \quad \text{②} \quad z = (1 - i)^2 \quad \text{①}$$

الحل

$$z = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \quad \text{①}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right) \quad \text{②}$$

$$z = 32 \left( \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{③}$$

$$\text{②} \quad \text{نعطى العددين العقديين } z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ و } z_2 = 1 - i$$

$$\text{①} \quad \text{اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد } z_1 \text{ و } z_2 \text{ و } \frac{z_1}{z_2}$$

$$\text{②} \quad \text{اكتب بالشكل الجبري } \frac{z_1}{z_2}$$

$$\text{③} \quad \text{استنتج أن } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ و } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

الحل

① الحساب مباشر:

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\text{②} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{③} \quad \text{من ① و ② نجد } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ و } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

③ اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي  $1 + i\sqrt{3}$  واستنتج الشكل المثلثي للعدد  $1 - i\sqrt{3}$ ، وأخيراً احسب العددين:

$$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5 \quad \textcircled{2} \quad z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad \textcircled{1}$$

الحل

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right) \quad \text{و} \quad 1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_1 = 2^5 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) + 2^5 \left( \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 32 \quad \textcircled{1}$$

$$z_2 = 2^5 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) - 2^5 \left( \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = -32\sqrt{3}i \quad \textcircled{2}$$

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية: \textcircled{4}

$$z = \left( \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)^6 \quad \textcircled{2} \quad z = \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^6 \quad \textcircled{1}$$

$$z = (1 + i)^{2016} \quad \textcircled{4} \quad z = (1 + i) \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \quad \textcircled{3}$$

الحل

$$z = \cos \left( -\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{5} \right) \quad \textcircled{2} \quad z = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \textcircled{1}$$

$$z = 2^{1008} \left( \cos 0 + i \sin 0 \right) \quad \textcircled{4} \quad z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{13\pi}{36} + i \sin \frac{13\pi}{36} \right) \quad \textcircled{3}$$

## تَدْرِبْ صَفِيحَة 116

① نضع  $z_1 = e^{i\pi/3}$  و  $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$  و  $z_3 = \sqrt{2}e^{2i\pi/3}$ . جد الشكل الأسّي للأعداد الآتية:

$$z_1z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3, \quad z_1z_2z_3, \quad z_3^4, \quad \frac{z_2}{z_3}$$

الجل

$z_1z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	$z_1^3$	$z_1z_2z_3$	$z_3^4$	$\frac{z_2}{z_3}$
$3e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$e^{i\pi}$	$3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

② اكتب بالشكل الأسّي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$\begin{aligned} z_2 &= (1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3} & \text{②} & & z_1 &= 2\sqrt{3} + 6i & \text{①} \\ z_4 &= (1+i\sqrt{3})^4 & \text{④} & & z_3 &= (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4} & \text{③} \\ z_6 &= (1+i\sqrt{3})^4 e^{4i\pi/3} & \text{⑥} & & z_5 &= \frac{6}{1+i} & \text{⑤} \\ z_8 &= \frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4} & \text{⑧} & & z_7 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 & \text{⑦} \\ z_{10} &= 3ie^{i\pi/3} & \text{⑩} & & z_9 &= -12e^{i\pi/4} & \text{⑨} \end{aligned}$$

الجل

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{6}e^{i7\pi/12} & \text{②} & & z_1 &= 4\sqrt{3}e^{i\pi/3} & \text{①} \\ z_4 &= 16e^{4i\pi/3} & \text{④} & & z_3 &= (\sqrt{2}-1)e^{i5\pi/4} & \text{③} \\ z_6 &= 16e^{2i\pi/3} & \text{⑥} & & z_5 &= 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4} & \text{⑤} \\ z_8 &= 256e^{-i\pi/6} & \text{⑧} & & z_7 &= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i5\pi/12} & \text{⑦} \\ z_{10} &= 3e^{i5\pi/6} & \text{⑩} & & z_9 &= 12e^{i5\pi/4} & \text{⑨} \end{aligned}$$

③ نضع  $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\pi/3}$  بين أي الخواص الآتية صحيحة:

$$\begin{aligned} Z &= -(1-i)e^{i\pi/3} & \text{②} & & |Z| &= 1 & \text{①} \\ Z &= e^{i\frac{13\pi}{12}} & \text{④} & & \arg Z &= -\frac{\pi}{12} & \text{③} \end{aligned}$$

الجل

الخواص الصحيحة هي ① و ④.

## تَدْرِبْ صَفِيحَة 118

① حلّ في  $\mathbb{C}$  كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين  $z$  و  $z'$ :

$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad \text{③}$$

الـجـل

$$z = -i, \quad z' = 2 - 2i \quad \text{①}$$

$$z = 1 + i, \quad z' = 2 - i \quad \text{②}$$

$$z = -1, \quad z' = 4i \quad \text{③}$$

② حلّ في  $\mathbb{C}$  كلاً من المعادلات الآتية:

$$2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad \text{①}$$

$$z^2 - 5z + 9 = 0 \quad \text{②}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{③}$$

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \quad \text{④}$$

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0 \quad \text{⑤}$$

$$(\theta \in \mathbb{R}), \quad z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \quad \text{⑥}$$

الـجـل

$$\left\{ \frac{1}{2}(3 + i), \frac{1}{2}(3 - i) \right\} \quad \text{①}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{11}) \right\} \quad \text{②}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \right\} \quad \text{③}$$

$$\{1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}\} \quad \text{④}$$

$$\{1 + \sqrt{2} + i, 1 + \sqrt{2} - i\} \quad \text{⑤}$$

$$\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\} \quad \text{⑥}$$

مثلاً لحلّ المعادلة الأخيرة نكتب:

$$\begin{aligned} z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 &= z^2 - 2(\cos \theta)z + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= (z - \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2 \\ &= (z - \cos \theta - i \sin \theta)(z - \cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

③ جد عددين عقديين  $p$  و  $q$  كي تقبل المعادلة  $z^2 + pz + q = 0$  العددين  $1 + 2i$  و  $3 - 5i$  جذرين لها.

الحل

▪ **طريقة أولى:** إذا كان  $1 + 2i$  و  $3 - 5i$  جذرين للمعادلة  $z^2 + pz + q = 0$  كان

$$-p = (1 + 2i) + (3 - 5i) = 4 - 3i$$

$$q = (1 + 2i)(3 - 5i) = 13 + i$$

$$\text{ومنه } p = -4 + 3i, q = 13 + i$$

▪ **طريقة ثانية:** إذا كان  $1 + 2i$  و  $3 - 5i$  جذرين للمعادلة  $z^2 + pz + q = 0$  حَقَّقْها، ومنه

$$(1 + 2i)^2 + p(1 + 2i) + q = 0$$

$$(3 - 5i)^2 + p(3 - 5i) + q = 0$$

وبالحلّ المشترك لجملة هاتين المعادلتين بعد إصلاحهما نجد  $p = -4 + 3i, q = 13 + i$ .

④ احسب جداء الضرب  $(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5)$  ثمّ حلّ في  $\mathbb{C}$  المعادلة

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$$

الحل

نلاحظ أنّ  $(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15$

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = ((z + 1)^2 - 4)((z + 1)^2 + 4)$$

$$= (z + 3)(z - 1)(z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$  هي  $\{-3, 1, -1 + 2i, -1 - 2i\}$ .

## أنشطة

### نشاط 1 كثيرات الحدود

نعلم مفهوم التابع الكثير الحدود ليصبح أي تابع  $P$  معرف على  $\mathbb{C}$  ويأخذ قيمه في  $\mathbb{C}$  من الشكل:

$$z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

حيث  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  هي أعداد عقدية، وإذا كانت  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  حقيقية قلنا إن  $P$  ذو أمثال حقيقية. وإذا كان  $a_n \neq 0$  قلنا إن درجة  $P$  تساوي  $n$ . نقبل صحة الخواص الآتية:

- إذا كان  $z_0$  جذراً لكثير حدود  $P$  درجته  $n$  (أي  $P(z_0) = 0$ ) وجد كثير حدود  $Q$  درجته  $n-1$  بحيث  $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ .
- لكل كثير حدود  $P$  درجته  $n$ ، عدداً من الجذور يساوي  $n$  في  $\mathbb{C}$  على أن نكرر كل جذر بقدر درجة مضاعفته.

#### 1 مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة

نهدف إلى حل المعادلة  $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$  (1)

① علّل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q$  يحقق:  $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z + 1)Q(z)$ .

② عيّن  $Q$  ثم حل المعادلة  $Q(z) = 0$ .

③ لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) أثبت أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع.

#### 2 مثال على كثير حدود من الدرجة الرابعة

نهدف إلى حل المعادلة  $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$  (2)

① أثبت بوجه عام أنه إذا كانت  $P$  حقيقية، وكان  $z_0$  جذراً للمعادلة  $P(z) = 0$  كان  $\bar{z}_0$  أيضاً جذراً للمعادلة  $P(z) = 0$ .

② تحقق أن  $i\sqrt{3}$  جذر للمعادلة (2). ماذا تستنتج بالاستفادة من ①؟

③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q$  يجعل المعادلة (2) تكتب  $(z^2 + 3)Q(z) = 0$ .

④ حل المعادلة (2). لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (2) أثبت أن هذه النقاط تقع على دائرة واحدة. عيّن مركزها ونصف قطرها.



1 نضع  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .

1 نلاحظ أن  $P(-1) = 0$ ، إذن يقبل  $P$  القسمة على  $(z + 1)$  فيوجد كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q$  يحقق:  $P(z) = (z + 1)Q(z)$ .

2 بإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود  $P(z)$  على  $(z + 1)$  نجد  $Q(z) = z^2 - 4z + 7$ . وحلول المعادلة  $Q(z) = 0$  هي  $\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\}$ .

3 لنضع  $z_A = -1$  و  $z_B = 2 - i\sqrt{3}$  و  $z_C = 2 + i\sqrt{3}$ . لنحسب أطوال أضلاع المثلث

$$AB = |z_B - z_A|, AC = |z_C - z_A|, BC = |z_C - z_B|$$

فنجد مباشرة أن أطوال الأضلاع الثلاثة متساوية وتساوي  $2\sqrt{3}$ ، فالمثلث متساوي الأضلاع.

2 1 ليكن كثير الحدود ذو الأمثال الحقيقية  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ . إذا كان وكان  $z_0$  جذراً للمعادلة  $P(z) = 0$  كان

$$a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

فإذا أخذنا مرافق طرفي المساواة السابقة، بعد ملاحظة أن الأمثال حقيقية، وجدنا

$$a_n \bar{z}_0^n + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$$

ومنه  $P(\bar{z}_0) = 0$ ، إذن  $\bar{z}_0$  هو أيضاً جذر للمعادلة  $P(z) = 0$ .

2 نضع  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ . يمكن التحقق بسهولة أن  $P(i\sqrt{3}) = 0$  وبلاستفادة من 1 نستنتج أن  $P(-i\sqrt{3}) = 0$ .

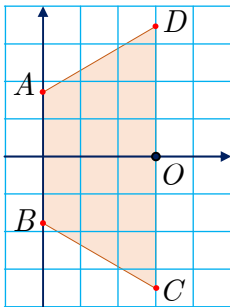
3 نستنتج من 2 أن  $P$  يقبل القسمة على كل من  $(z - i\sqrt{3})$  و  $(z + i\sqrt{3})$  فهو يقبل القسمة على جداء ضربيهما أي  $z^2 + 3$ ، إذن يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q$  يحقق  $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$  فالمعادلة (2) تكتب  $(z^2 + 3)Q(z) = 0$ . وبإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود  $P(z)$  على  $z^2 + 3$  أو بإخراج هذا المقدار عاملاً مشتركاً كما يأتي:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 \\ &= (z^2 + 3)z^2 - 6z(z^2 + 3) + 21z^2 + 63 \\ &= (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) \end{aligned}$$

فنجد  $Q(z) = z^2 - 6z + 21 = (z - 3)^2 + 12$ .

4 نستنتج من الصيغة  $(z^2 + 3)((z - 3)^2 + 12) = 0$  للمعادلة (2) أن حلولها هي

$$z_A = i\sqrt{3} \text{ و } z_B = -i\sqrt{3} \text{ و } z_C = 3 - 2i\sqrt{3} \text{ و } z_D = 3 + 2i\sqrt{3}$$



لما كانت النقطتان  $B$  و  $C$  نظيرتا  $A$  و  $D$  بالترتيب بالنسبة إلى المحور الحقيقي، أو محور الفواصل، استنتجنا أن الرباعي  $ABCD$  شبه منحرف متساوي الساقين. فهو إذن رباعي دائري.

وإذا كان  $O$  مركز الدائرة المارة برؤوسه، وجب أن ينتمي  $O$  إلى محور التناظر، فالعدد العقدي  $x$  الذي تمثله النقطة  $O$  هو عدد حقيقي. ولأن  $O$  يبعد المسافة نفسها عن كل من  $D$  و  $A$  استنتجنا أنّ

$$|x - z_A| = |x - z_D|$$

$$|x - i\sqrt{3}|^2 = |x - 3 - 2i\sqrt{3}|^2$$

ومنه نجد  $x = 3$ . إذن مركز الدائرة  $O$  هو النقطة التي يمثلها العدد العقدي  $z_0 = 3$  أما نصف قطر الدائرة فيساوي مثلاً  $OA = 2\sqrt{3}$ .

**ملاحظة:** نجد من الحساب السابق أنّ  $O$  يقع في منتصف القطعة المستقيمة  $[CD]$  أي إنّ  $[CD]$  هو قطر الدائرة المارة برؤوس الرباعي  $ABCD$ . وبوجه خاص: المثلث  $CAD$  قائم في  $A$  وهذا ما يمكن أن نتحقق من صحته مباشرة بحساب أطوال الأضلاع، وتطبيق عكس مبرهنة فيثاغورث. فنجد طريقة أخرى لحل السؤال.

## نشاط 2 الجذور التربيعية لعدد عقدي

نُعطى عدداً عقدياً غير الصفر  $w = a + ib$  ونهدف إلى حل المعادلة  $z^2 - w = 0$  (\*) . هناك أسلوبان ممكنان:

▪ يمكن أن نكتب  $w = R e^{i\varphi}$  ثم نبحث عن  $z = r e^{i\theta}$  تحقق (\*). نتيقن عندئذ أنّ  $r = \sqrt{R}$  وأنّ

$$z_0 = \sqrt{R} e^{i\frac{\varphi}{2}} \text{ حيث } z \in \{z_0, -z_0\} \text{، إذن } \theta = \frac{\varphi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{\varphi}{2} + \pi \text{ (} 2\pi \text{)}$$

▪ ويمكن أن نبحث عن  $z = x + iy$  تحقق (\*). وهنا علينا حل جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

هنا يمكننا أيضاً أن نستفيد من المعادلة المساعدة  $|z|^2 = |w|$  التي تنتج مباشرة من (\*) وتعطي المعادلة (3) الآتية:  $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ . وهكذا نحل في  $\mathbb{R}$  جملة المعادلتين (1) و (3) ثم نختار من مجموعة الحلول الناتجة تلك التي تحقق المعادلة (2).

### 1 تعيين الجذور التربيعية للعدد $i$

① اكتب  $i$  بالشكل الأسّي. ② حل المعادلة  $z^2 = i$ .

### 2 تعيين الجذور التربيعية للعدد $1 + i$

① أثبت أنّ حل المعادلة  $(x + iy)^2 = 1 + i$  في  $\mathbb{R}$ . يؤول إلى تعيين  $x$  و  $y$  تحققان

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

② حل المعادلة  $z^2 = 1 + i$ .

③ حل المعادلة  $z^2 = 1 + i$  بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية  $\frac{\pi}{8}$ .

الحل

①  $i = e^{i\pi/2}$

② هنا  $R = 1, \varphi = \pi/2$ . هناك إذن حلان للمعادلة هما  $z_0 = e^{i\pi/4}$  و  $z_1 = -z_0 = -e^{i\pi/4}$ .

② حل المعادلة  $(x + iy)^2 = 1 + i$  يكافئ حل المعادلة  $(x^2 - y^2) + 2ixy = 1 + i$ ، وهذا

يكافئ حل جملة المعادلتين الحقيقيتين

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

وبحساب طويلة الطرفين في المعادلة العقديّة نجد  $x^2 + y^2 = 1$ . إذن، إذا كان  $(x, y)$  حلاً للمعادلة

$(x + iy)^2 = 1 + i$  كان  $(x, y)$  حلاً لجملة المعادلات :

$$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

وبالعكس يُمكن التحقق بسهولة أنه إذا كان  $(x, y)$  حلاً للجملة  $(*)$  كان  $(x + iy)^2 = 1 + i$ .

② من المعادلتين الأولى والثانية نجد  $x^2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$  ومن ثمّ

$$x \in \left\{ \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} \right\}$$

وبالاستفادة من المعادلة الثالثة نحسب  $y = 1/2x$  لنجد قيمة  $y$  الموافقة لكل  $x$  :

$$(x, y) \in \left\{ \left( \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right), \left( -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right) \right\}$$

أو

$$(x, y) \in \left\{ \left( \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \right), \left( -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \right) \right\}$$

③ بملاحظة أنّ  $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$  يمكننا حل  $z^2 = 1 + i$  باستخدام الطويلة والزاوية لنجد أنّ

للمعادلة حلان هما  $z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\pi/8}$  و  $z_1 = -z_0 = -\sqrt[4]{2} e^{i\pi/8}$

بالمقارنة بين الحلول في ② و ③ نجد:  $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2} = \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{8} + i\sqrt[4]{2} \sin \frac{\pi}{8}$

ومنه نجد:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

### نشاط 3 الأعداد العقدية والتوابع المثلثية

عندما يكون  $z$  و  $z'$  عددين عقديين طويلة كل منهما تساوي الواحد وزاويتاهما  $a$  و  $b$  بالترتيب، تكون طويلة  $zz'$  مساوية الواحد وزاويته  $a + b$ . بكتابة  $zz'$  بطريقتين أثبت أن

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{و} \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \blacksquare$$

ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال  $-b$  بالمقدار  $b$ ؟ استنتج أن

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)), \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)), \quad \cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض  $a + b = p$  و  $a - b = q$ ؟

استفد مما سبق لتحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة المثلثية:  $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$ .

#### الحل

لدينا  $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ ، وبالعودة إلى الكتابة المثلثية نجد:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$$

أو بشكل آخر:

$$(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$$

ونحصل على العلاقتين المطلوبتين بمقارنة الجزأين الحقيقي والتخيلي.

أي

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (2)$$

عند استبدال  $-b$  بالمقدار  $b$  نجد:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (1')$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (2')$$

وبجمع المساواتين (1) و (1') طرفاً مع طرف، ثم القسمة على 2 نجد:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

وبجمع المعادلتين (2) و (2')، ثم القسمة على 2 نجد:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

■ لدينا  $a = \frac{p+q}{2}$ ,  $b = \frac{p-q}{2}$ . وبالتعويض في المتطابقات السابقة نجد:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

■ بالاستفادة من العلاقات السابقة تُكتب المعادلة المعطاة بالشكل

$$-2 \sin \frac{3x+5x}{2} \sin \frac{3x-5x}{2} = 2 \sin \frac{6x+2x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2}$$

$$\cdot \sin 4x (\sin x - \cos 2x) = 0 \quad \text{أو} \quad \sin 4x \sin x = \sin 4x \cos 2x$$

إما  $\sin 4x = 0$  وهذا يكافئ  $x = \frac{1}{4}k\pi$  حيث  $k$  عدد صحيح.

أو  $\sin x = \cos 2x$  وهذه تكافئ  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos 2x$  فإما  $x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi k$  حيث  $k$  عدد

صحيح، أو  $x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k$  حيث  $k$  عدد صحيح.

والخلاصة: مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$\left\{ \frac{1}{4}\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

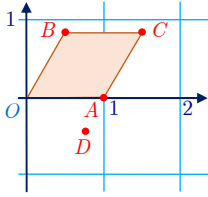
## تمرينات ومسائل 🤖

1 لنكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية  $a = 1$  و  $b = e^{i\pi/3}$

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$$

① اكتب  $c$  بالشكل الأسّي، واكتب  $d$  بالشكل الجبري.

② اضع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس.



$b$  أثبت أن الرباعي  $OACB$  معين.

الحل

$$① c = \sqrt{3}e^{i\pi/6}, d = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

② التوضع التقريبي للنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  :

$b$  مثلاً: بحساب أطوال أضلاع الرباعي نجد أن  $OA = AC = CB = BO = 1$ ، فالرباعي

$OACB$  معين.

2 ① اكتب بالشكل الأسّي حلول المعادلة :

$$(1) (z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0$$

② أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل

① مثلاً بالإتمام إلى مربع كامل نجد

$$\begin{aligned} (z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) &= \left( (z + \frac{3}{2}\sqrt{3})^2 + \frac{9}{4} \right) \left( (z - \frac{3}{2}\sqrt{3})^2 + \frac{9}{4} \right) \\ &= \left( z + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i \right) \left( z + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \right) \left( z - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i \right) \left( z - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \right) \\ &= (z - 3e^{-5i\pi/6}) (z - 3e^{5i\pi/6}) (z - 3e^{-i\pi/6}) (z - 3e^{i\pi/6}) \end{aligned}$$

فحلول المعادلة (1) مكتوبة بالشكل الأسّي هي :

$$\{ a = 3e^{-i\pi/6}, b = 3e^{i\pi/6}, c = 3e^{5i\pi/6}, d = 3e^{-5i\pi/6} \}$$

② نلاحظ أن  $b = \bar{a}$  و  $c = -a$  وأخيراً  $d = \bar{c} = -b$

من المساويتين  $c = -a$  و  $d = -b$  نستنتج أن قطري الرباعي  $ABCD$  متناصفان فهو متوازي الأضلاع، ومن المساويتين  $d = \bar{c}$  و  $b = \bar{a}$  نستنتج أن القطر  $[BD]$  هو نظير  $[AC]$  بالنسبة إلى التناظر المحوري الذي محوره هو المحور الحقيقي (محور الفواصل) فلهما الطول نفسه. إذن قطرا الرباعي  $ABCD$  متناصفان ومتساويان فهو مستطيل.

3 بسّط كتابة العدد العقدي :  $Z = \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$  ، موضّحاً قيم  $x$  التي يكون عندها هذا

المقدار موجوداً.

الحل

نلاحظ أنّ طويّلة المقام تساوي  $(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x = 2(1 + \cos x)$  فهو ينعدم فقط في حالة كون  $x$  من الشكل  $\pi + 2\pi k$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ . إذن يكون  $Z$  معرّفاً في حالة  $x \notin \{\pi(1 + 2k) : k \in \mathbb{Z}\}$  وعندئذ

$$Z = \frac{1 + e^{-ix}}{1 + e^{ix}} = \frac{e^{-ix}(e^{ix} + 1)}{1 + e^{ix}} = e^{-ix}$$

ملاحظة: يمكن أيضاً اعتماد طريقة الضرب بمرافق المقام كما يأتي:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x} = \frac{(1 + \cos x - i \sin x)^2}{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} \\ &= \frac{(1 + \cos x)^2 - \sin^2 x - 2i(1 + \cos x) \sin x}{2(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \cos x - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} - 2i \sin x \right) : \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos x - (1 - \cos x) - 2i \sin x) = \cos x - i \sin x = e^{-ix} \end{aligned}$$

ويمكن أيضاً التعبير عن كل من  $1 + \cos x$  و  $\sin x$  بدلالة النسب المثلثية لنصف  $x$ .

4 ① ليكن  $z$  عدداً عقدياً ما، وليكن  $u$  عدداً عقدياً طويّلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أنّ  $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$  عددٌ حقيقي.

② نفترض أنّ  $u \neq 1$  وأنّ  $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$  عددٌ حقيقي أثبت أنّه إمّا أن يكون  $z$  حقيقياً أو أن يكون

$$|u| = 1$$

الحل

① لأنّ طويّلة  $u$  تساوي الواحد استنتجنا أنّ  $u\bar{u} = |u|^2 = 1$  إذن  $\bar{u} = \frac{1}{u}$ . الآن لنضع

عندئذ نحسب مباشرة  $w = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$

$$\bar{w} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{\bar{z} - \frac{z}{u}}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{u\bar{z} - z}{u - 1} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = w$$

وينتج من كون  $\bar{w} = w$  أنّ العدد  $w$  عددٌ حقيقي.

② كما في الحالة السابقة نضع  $w = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$  ، ولنحسب الفرق  $w - \bar{w}$  :

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} - \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{(z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) - (\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u)}{(1 - u)(1 - \bar{u})} \\ &= \frac{z - \bar{u}z - u\bar{z} + |u|^2 \bar{z} - \bar{z} + u\bar{z} + \bar{u}z - |u|^2 z}{|1 - u|^2} \\ &= \frac{z(1 - |u|^2) - \bar{z}(1 - |u|^2)}{|1 - u|^2} = (z - \bar{z}) \cdot \frac{1 - |u|^2}{|1 - u|^2} \end{aligned}$$

وعليه إذا كان  $w$  عدداً حقيقياً كان  $w = \bar{w}$  ومن ثم  $(z - \bar{z}) \cdot (1 - |u|^2) = 0$  . فإما أن يكون  $z$  عدداً حقيقياً، أو أن تكون طويلة  $u$  مساوية 1 .

5 اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$z_2 = (3 + i)^4 \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$

الحل

$$z_2 = 28 + 96i \quad \text{و} \quad z_1 = \cos 2x + i \sin 2x$$

6 ليكن  $z$  و  $z'$  عددين عقديين أثبت أن:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

الحل

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 + |z - z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} + (z - z')\overline{(z - z')} \\ &= (z + z')(z + \bar{z}') + (z - z')(z - \bar{z}') \\ &= 2|z|^2 + 2|z'|^2 \end{aligned}$$

7 ليكن المثلث  $ABC$  . أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

① المثلث متساوي الساقين ورأسه  $A$  .

②  $2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{A}$  .

الحل

المثلث متساوي الساقين ورأسه  $A$  يكافئ  $\hat{B} = \hat{C}$  وهذا يكافئ  $\sin(\hat{B} - \hat{C}) = 0$  وهذا بدوره يكافئ  $\sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}$  أو  $\sin(\hat{B} + \hat{C}) + \sin(\hat{B} - \hat{C}) = \sin(\hat{B} + \hat{C})$  . لأن  $\hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{C}$  .





## لنتعلم البحث معاً

### 8 تعيين مجموعة

ليكن  $a$  عدداً عقدياً معطى. لتكن  $\mathcal{E}$  مجموعة الأعداد العقدية  $z$  التي تحقق :

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عيّن المجموعة  $\mathcal{E}$  ومثلها في مستوٍ مزوّد بمعلم.

#### نحو الحل

الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي بوضع  $z = x + iy$  و  $a = \alpha + i\beta$  حيث  $x$  و  $y$  و  $\alpha$  و  $\beta$

هي أعداد حقيقية، ثم نسعى إلى إيجاد معادلة ديكرتية للمجموعة  $\mathcal{E}$ .

① أثبت بهذا الأسلوب أنّ  $M(x, y)$  تنتمي إلى  $\mathcal{E}$  إذا وفقط إذا كان  $xy = \alpha\beta$ .

② ناقش الحالتين  $\alpha\beta = 0$  و  $\alpha\beta \neq 0$  ثم عيّن  $\mathcal{E}$  في هاتين الحالتين.

هناك أسلوب آخر، نلاحظ أنّ مرافق  $z^2 - a^2$  هو  $\bar{z}^2 - \bar{a}^2$  أثبت تكافؤ الخواص

▪  $z$  تنتمي إلى  $\mathcal{E}$ .

▪  $z^2 - a^2$  حقيقي.

▪ الجزء التخيلي للمقدار  $z^2 - a^2$  يساوي 0 أو  $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(a^2)$ .

استنتج مجدداً المجموعة  $\mathcal{E}$ .

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

الحل

① هذه عملية تعويض وحساب بسيطة.

② إذا كان  $\alpha\beta = 0$  كانت المجموعة  $\mathcal{E}$  مساوية لاجتماع المحورين الإحداثيين. وإذا كان  $\alpha\beta \neq 0$

مثّلت المجموعة  $\mathcal{E}$  الخط البياني للتابع  $\frac{\alpha\beta}{x}$ .

الخطوات واضحة ولا تحتاج إلى إضافات.



## قُدماً إلى الأمام

9 نتأمل عددين عقديين  $z$  و  $w$  يحققان  $|z|=1$  و  $|w|=1$  و  $zw \neq -1$  أثبت أن العدد العقدي

$$Z = \frac{z+w}{1+zw}$$
 عدد حقيقي.

الحل

الفكرة الأساسية هنا هي أنه في حالة عدد عقدي طويلته تساوي الواحد، المرافق يساوي المقلوب إذن

$$\bar{Z} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{1 + \bar{z}\bar{w}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{zw}} = \frac{z+w}{1+zw} = Z$$

إذن  $Z$  عدد حقيقي لأنه يساوي مرافقه.

10 نتأمل كثير الحدود  $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

① عيّن عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  يحققان  $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

② حلّ في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$

الحل

① بافتراض المساواة

$$z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

محققة تكون  $a + 4$  هي أمثال  $z^3$  وهي يجب أن تساوي الصفر، إذن  $a = -4$ . وبمقارنة الحدّ الثابت في الطرفين نجد  $-40 = 2ab = -8b$  إذن  $b = 5$ . وبالعكس، نتحقّق مباشرة بإجراء عملية الضرب أن

$$P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$$

② بعد تفريق كثير الحدود  $P$  أصبح تعيين جذوره يسيراً ونجد مجموعة حلول المعادلة:

$$\{2 + i, 2 - i, 2(-1 - \sqrt{3}), 2(-1 + \sqrt{3})\}$$

**11** حلّ في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$  إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

**الحل**

لنفترض أنّ  $w$  هو الحلّ التخيلي البحت أي الذي يحقق  $\bar{w} = -w$ . إذن لدينا

$$w^3 - (3 + 4i)w^2 - 6(3 - 2i)w + 72i = 0 \quad (1)$$

وبأخذ مرافق الطرفين والاستفادة من نجد أيضاً

$$-w^3 - (3 - 4i)w^2 + 6(3 + 2i)w - 72i = 0 \quad (2)$$

فإذا جمعنا (1) و (2) استنتجنا أنّ  $w(w - 4i) = 0$ ، ولكنّ  $w = 0$  ليس حلاً للمعادلة (1) فلا بُدّ أن يكون الحلّ التخيلي البحت المنشود هو  $4i$ .

إذن يقبل كثير الحدود  $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i$  القسمة على  $z - 4i$  فإذا أجرينا قسمة إقليدية وجدنا أنّ  $P(z) = (z - 4i)(z^2 - 3z - 18) = (z - 4i)(z - 6)(z + 3)$ . إذن حلول المعادلة هي  $\{4i, -3, 6\}$ .

**12** ليكن  $\alpha = e^{2i\pi/5}$ . نضع  $A = \alpha + \alpha^4$  و  $B = \alpha^2 + \alpha^3$ .

① أثبت أنّ  $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$  واستنتج أنّ  $A$  و  $B$  هما جذرا المعادلة من الدرجة

$$\text{الثانية: } x^2 + x - 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{② عبّر عن } A \text{ بدلالة } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

$$\text{③ حلّ المعادلة (1) واستنتج قيمة } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

**الحل**

① هذا مجموع متتالية هندسية حدها الأوّل 1 وأساسها  $\alpha$  إذن

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - \alpha} = 0$$

لنحسب مستفيدين من كون  $\alpha^5 = 1$ :

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^3) \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\alpha + \alpha^4) \cdot (\alpha^2 + \alpha^3) \\ &= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \end{aligned}$$

فنستنتج أنّ  $A$  و  $B$  هما جذرا المعادلة  $x^2 + x - 1 = 0$  (1).

② بملاحظة أن  $\alpha^4 = \bar{\alpha}$  نجد  $A = 2\operatorname{Re}(\alpha) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

③ بحساب جذور المعادلة (1) نجد الجذرين

$$\left\{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})\right\}$$

وبملاحظة أن كلاً من  $2\cos\frac{2\pi}{5}$  و  $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$  هو الجذر الموجب للمعادلة (1) نجد

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

13 ليكن  $\theta$  عدداً حقيقياً من المجال  $]-\pi, \pi[$ . نعرف  $t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

① احسب المقادير  $\frac{2t}{1+t^2}$  و  $\frac{2t}{1-t^2}$  و  $\frac{1+t^2}{1-t^2}$  بدلالة النسب المثلثية للعدد  $\theta$ .

② أثبت صحة العلاقات:

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل

① نلاحظ أن

$$1 + t^2 = \frac{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2 + (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2} = \frac{2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2}$$

$$1 - t^2 = \frac{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2 - (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2} = \frac{4}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2}$$

إذن

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{1+t^2} &= 2 \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} \times \frac{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2}{2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} \\
&= \frac{(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \\
&= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2i \sin \theta}{2 \cos \theta} = i \tan \theta \\
\frac{2t}{1-t^2} &= 2 \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} \times \frac{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})}{2} \\
&= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin \theta \\
\frac{1+t^2}{1-t^2} &= \frac{2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2} \times \frac{(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2}{4} \\
&= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta
\end{aligned}$$

② نلاحظ أنّ

$$t = \frac{2i \sin(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بالتعويض في العلاقات الواردة في ① نجد المطلوب.

① حلّ في  $\mathbb{C}$  المعادلات  $z^2 = w$  في الحالات الآتية

$$w = -7 + 24i \quad \text{③} \quad , w = -21 - 20i \quad \text{②} \quad , w = -3 + 4i \quad \text{①}$$

② حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات الآتية:

$$z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0 \quad \text{①}$$

$$2iz^2 + (3 + 7i)z + 4 + 2i = 0 \quad \text{②}$$

$$z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0 \quad \text{③}$$

الحل

$$\{3 + 4i, -3 - 4i\} \quad \text{③} \quad \{2 - 5i, -2 + 5i\} \quad \text{②} \quad \{1 + 2i, -1 - 2i\} \quad \text{①} \quad \text{①}$$

$$\{-2 - 5i, 1 - 3i\} \quad \text{③} \quad \{-3 + i, \frac{1}{2}(i - 1)\} \quad \text{②} \quad \{-2 - 3i, 1 - i\} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

①5 في حالة عدد عقدي  $z \neq -1$  نضع  $Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$  ونفترض أنّ  $z = x + iy$  و  $Z = X + iY$

حيث  $x$  و  $y$  و  $X$  و  $Y$  هي أعداد حقيقية.

- ① احسب  $X$  و  $Y$  بدلالة العددين  $x$  و  $y$ .
- ② أثبت أن مجموعة النقاط  $M(z)$  التي يكون عندها  $Z$  حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.
- ③ أثبت أن مجموعة النقاط  $M(z)$  التي يكون عندها  $Z$  تخيلياً بحثاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل

① بضرب البسط والمقام بمرافق المقام في عبارة  $Z$  نجد

$$X + iY = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy} = \frac{(1 + x)(2 + x) + y^2 + iy}{(1 + x)^2 + y^2}$$

ومنه

$$X = \frac{(1 + x)(2 + x) + y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

- ② يكون  $Z$  حقيقياً إذا وفقط إذا كان  $z \neq -1$  و  $y = 0$ ، وهذا يمثل محور الفواصل محذوفاً منه النقطة التي تقابل العدد العقدي  $-1$  أي  $(-1, 0)$ .
- ③ يكون  $Z$  تخيلياً بحثاً إذا وفقط إذا كان  $z \neq -1$  وكان  $(1 + x)(2 + x) + y^2 = 0$  أو  $(x + \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  وهذا يمثل الدائرة التي مركزها النقطة  $(-\frac{3}{2}, 0)$  ونصف قطرها  $\frac{1}{2}$  محذوفاً منها النقطة التي تقابل العدد العقدي  $-1$ .

16 عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية  $z$  التي تحقق الشرط المعطى:

- ① المقدار  $(z + 1)(\bar{z} - 2)$  حقيقي.
- ② العدد  $z$  مختلف عن  $4i$  و  $\frac{z + 2i}{z - 4i}$  عدد حقيقي.

الحل

- ① يكون المقدار  $(z + 1)(\bar{z} - 2)$  حقيقياً إذا وفقط إذا كان  $(\bar{z} + 1)(z - 2) = (z + 1)(\bar{z} - 2)$ ، وهذا يكافئ  $z = \bar{z}$ . والمعادلة الأخيرة تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ② يكون المقدار  $\frac{z + 2i}{z - 4i}$  حقيقياً إذا وفقط إذا كان  $z \neq 4i$  وكان  $\frac{z + 2i}{z - 4i} = \frac{\bar{z} - 2i}{\bar{z} + 4i}$ ، وهذا يكافئ  $z = -\bar{z}$ . فمجموعة الأعداد المحققة للشرط السابق هي مجموعة الأعداد التخيلية البحتة عدا  $4i$ .

# 5

## تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

- 1 تمثيل الأشعة بأعداد عقدية
- 2 استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع
- 3 الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التمثيل الهندسي للأعداد العقدية.
- حساب زاوية شعاعين انطلاقاً من التمثيل العقدي.
- التعبير عن التعامد والتوازي باستعمال الأعداد العقدية.
- التمثيل العقدي للتحويلات الهندسية: الانسحاب - الدوران - التحاكي التناظر المركزي.
- استعمال الأعداد العقدية في حل بعض مسائل الهندسة المستوية.



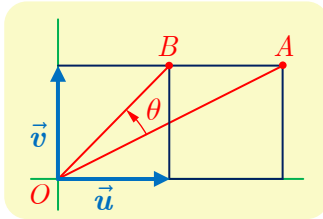
# تطبيقات الأعداد العقدية

## في الهندسة

### انطلاقاً نشطة



نتأمل معلماً متجانساً  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  في المستوي.



- ① يبين الشكل المجاور مربعين طول ضلع كل منهما يساوي الواحد. يُطلب حساب النسبة  $r = \frac{OB}{OA}$  وتعيين قياس للزاوية  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ . بالطبع يمكن استعمال الطرائق التقليدية، ولكننا هنا سنسعى إلى استعمال الأعداد العقدية.

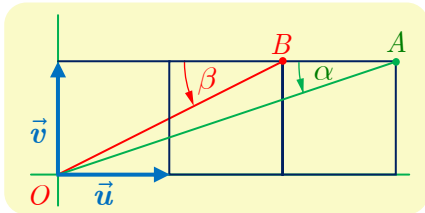
① أعط  $z_B$  و  $z_A$  العددين العقديين اللذان يمثلان  $B$  و  $A$ .

② اشرح العلاقة بين  $Z = \frac{z_B}{z_A}$  والعددين المطلوبين  $r$  و  $\theta$ .

③ احسب  $Z$  واستنتج قيم  $r$  و  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$ .

**الحل** هنا  $z_B = 1 + i$  و  $z_A = 2 + i$  .  $Z = z_B / z_A = re^{i\theta} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$  . ومنه  $r = \sqrt{\frac{2}{5}}$  و  $\theta$

من  $[0, \frac{\pi}{2}]$  تحقق  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$  . أي  $\theta \approx 18^\circ 26' 6''$ .



- ② يبين الشكل المجاور ثلاثة مربعات طول ضلع كل منهما يساوي الواحد. يُطلب حساب  $\alpha + \beta$  مجموع قياسي الزاويتين المبينتين في الشكل.

① أعط  $z_B$  و  $z_A$  العددين العقديين اللذين يمثلان  $B$  و  $A$ .

② اشرح العلاقة بين كل من  $\alpha$  و  $\beta$  وزاويتي العددين العقديين  $z_B$  و  $z_A$ .

③ بيّن أنّ المطلوب هو حساب زاوية العدد العقدي  $Z = z_A \cdot z_B$ .

④ احسب  $Z$  واستنتج قيمة  $\alpha + \beta$ .

**الحل**  $z_B = 2 + i = \sqrt{5}e^{i\beta}$  و  $z_A = 3 + i = \sqrt{10}e^{i\alpha}$

$$Z = z_A z_B = 5\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta)} = 5(1 + i)$$

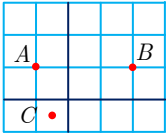
ولكن  $\alpha$  و  $\beta$  زاويتان حادتان، إذن  $\alpha + \beta \in [0, \pi]$  وتحققان  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  أي  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .

## تَدْرِبْ صفحة 132

① لتكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z_B = 2 + i \text{ و } z_A = -1 + i$$

- ① وُضِعَ النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  في شكل.
- ② احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{BC}$ .
- ③ احسب أطوال أضلاع المثلث  $ABC$  وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في  $C$ .

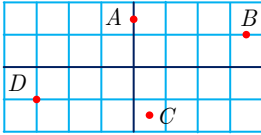


الجل لدينا  $\overrightarrow{AB} = 3, \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \overrightarrow{BC} = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ ، ومن ثمّ  $AB = 3$  و  $AC = \frac{\sqrt{10}}{2}$  و  $BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$ . نلاحظ أنّ  $AC^2 + BC^2 - AB^2 = \frac{34+10}{4} - 9 = 2 \neq 0$  فالمثلث  $ABC$  ليس قائم الزاوية في  $C$ .

② لتكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_D = -3 - i \text{ و } z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ و } z_B = \frac{7}{2} + i \text{ و } z_A = \frac{3}{2}i$$

- ① وُضِعَ النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  في شكل.
- ② ما طبيعة الرباعي  $ABCD$ ؟



$$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$\overrightarrow{DC} = z_C - z_D = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

ومن ثمّ  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  والرباعي  $ABCD$  متوازي الأضلاع.

③ لتكن النقطتان  $A$  و  $B$  اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:  $z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$  و  $z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$ .

- ① أثبت أنّ  $A$  و  $B$  تنتميان إلى الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها يساوي 4.
- ② جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة  $C$  التي تجعل  $O$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .
- ③ ما طبيعة المثلث  $ABC$ ؟

الجل لدينا  $|z_A|^2 = 4(1+3) = 16$ ، إذن  $|z_A| = 4$ ، وكذلك  $|z_B| = 4$ ، إذن  $OA = OB = 4$ ،

والنقطتان  $A$  و  $B$  تنتميان إلى الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها يساوي 4.

استناداً إلى تعريف  $C$  لدينا  $z_C + z_A + z_B = 3z_O = 0$  ومنه  $z_C = -z_A - z_B = 4$ . إذن  $C$

تنتمي أيضاً إلى الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها يساوي 4. فمركز الدائرة المارة برؤوس المثلث

$ABC$  (نقطة تقاطع محاوره) هي نفسها نقطة تلاقي متوسطاته. فهو إذن متساوي الأضلاع. ويمكننا

التحقق مباشرة من ذلك بحساب أطوال أضلاعه لنجدها متساوية.

④ نتأمل شعاعين  $\vec{U}$  و  $\vec{V}$  يمثلهما العددان العقديان  $u$  و  $v$  بالترتيب. نفترض أن  $v = iu$  ونضع  $\vec{AB} = \vec{u}$  و  $\vec{AC} = \vec{v}$ . أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.

**الحل** المساواة  $v = iu$  تقتضي أن  $\arg\left(\frac{v}{u}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$  وأن  $|v| = |u|$  أي

$AB = AC$ . فالمثلث  $ABC$  قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.

⑤ المثلثان  $ABC$  و  $A'B'C'$  معرفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$c = 2 + i, \quad b = 2 + 3i, \quad a = 1 - i,$$

$$c' = 4 + i, \quad b' = 3 - i, \quad a' = -2 + 3i,$$

① احسب العدد الممثل للشعاع  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

② جد العدد العقدي الممثل للنقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

③ أثبت أن  $G$  هي مركز ثقل المثلث  $A'B'C'$ .

**الحل**

① ليكن  $Z$  العدد العقدي الممثل للشعاع  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$ ، عندئذ

$$Z = a' - a + b' - b + c' - c = 0$$

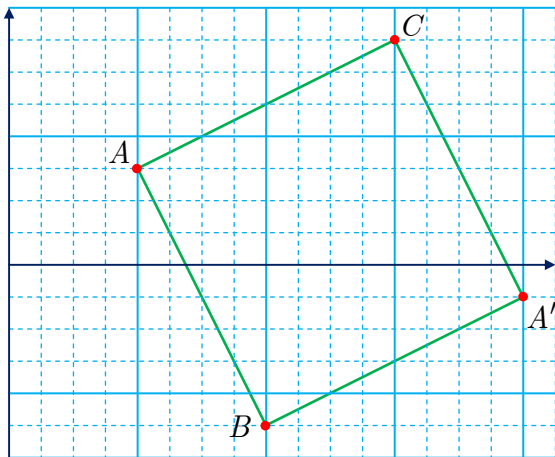
$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0} \text{ ومن ثمَّ}$$

$$z_G = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{5}{3} + i \quad ②$$

$$z_G = 0 \quad \text{لأنَّ } \frac{1}{3}(a' + b' + c') = \frac{1}{3}(a + b + c) \quad ③$$

⑥ لتكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي تمثلها الأعداد العقدية:  $a = 1 + \frac{3}{4}i$  و  $b = 2 - \frac{5}{4}i$

$$\text{و } c = 3 + \frac{7}{4}i$$



① وضّع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  في شكل. ما العلاقات

التي تربط الأعداد العقدية المُمثلة للشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$ ؟

② استنتج أن  $ABC$  مثلث قائم ومتساوي الساقين.

③ احسب العدد العقدي الممثل للنقطة  $A'$  التي

تجعل  $ABA'C$  مربعاً.

**الحل**

① ليكن  $u$  و  $v$  العددين العقديين الممثلين للشعاعين

$\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  بالترتيب. عندئذ  $u = b - a = 1 - 2i$  و  $v = c - a = 2 + i$ ، وإذن  $v = iu$

② فالمثلث  $ABC$  مثلث قائم ومتساوي الساقين رأسه  $A$ ، مثلما فعلنا في التمرين ④ أعلاه.

③ لما كان  $\vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{AC}$  استنتجنا أن  $z_{A'} = a + u + v = 4 - \frac{1}{4}i$

٧) لتكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$d = -4 - 2i \text{ و } c = 4 + 2i \text{ و } b = -1 + 7i \text{ و } a = 2 - 2i$$

١) لتكن  $\Omega$  النقطة التي يمثلها العدد العقدي  $\omega = -1 + 2i$ . أثبت وقوع النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  على دائرة مركزها  $\Omega$  ونصف قطرها يساوي 5.

٢) ليكن  $e$  العدد المُمثل للنقطة  $E$  منتصف  $[AB]$ . احسب  $e$  وبرهن أنّ  $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$ .

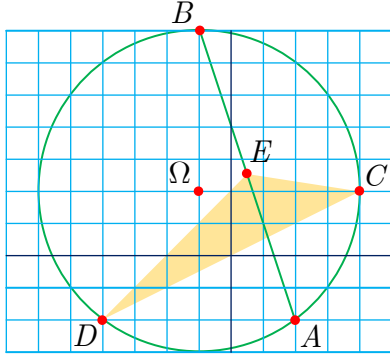
٣) ماذا يمثل المستقيم  $(EA)$  في المثلث  $DEC$ ؟

الحل

١) علينا أن نحسب الأطوال  $\Omega A$  و  $\Omega B$  و  $\Omega C$  و  $\Omega D$ . فنجد مثلاً

$$\Omega A = |a - \omega| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

وكذلك نجد بحساب مماثل أنّ  $\Omega B = \Omega C = \Omega D = 5$ . فهذه النقاط تقع جميعاً على الدائرة التي مركزها  $\Omega$  ونصف قطرها يساوي 5.



٢) لما كان  $e = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$  استنتجنا أنّ

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\text{إذن } \frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

٣) نستنتج مما سبق أنّ  $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$  فالمستقيم  $(EA)$  منصف للزاوية  $DEC$ ، ومن ثمّ هو منصف للزاوية  $E$  في المثلث  $DEC$ .

٨) لتكن النقطتان  $A$  و  $B$  اللتان تمثلهما الأعداد العقدية :  $1$  و  $3 + 2i$  بالترتيب. مثّل في كل من

الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط  $M(z)$  التي تحقق:

$$|z - 1| = |z - 3 - 2i| \quad 1$$

$$|z - 3 - 2i| = 1 \quad 2$$

الحل

١) هذا هو محور القطعة المستقيمة  $[AB]$  حيث  $A$  هي النقطة الموافقة للعدد العقدي 1، و  $B$  هي النقطة الموافقة للعدد العقدي  $3 + 2i$ .

٢) هذه هي الدائرة التي مركزها  $B$  ونصف قطرها يساوي 1.



- ① لتكن  $M$  النقطة التي يمثلها العدد العقدي  $z = 1 + i$ . جد العدد العقدي  $z'$  المُمثِّل للنقطة  $M'$  صورة  $M$  وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:
- ①  $T$  الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ . ②  $\mathcal{H}$  التحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته 3.
- ③  $\mathcal{R}$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ . ④  $\mathcal{S}$  التناظر الذي مركزه  $A(1 - 3i)$ .
- ⑤  $\mathcal{R}$  الدوران الذي مركزه  $A(2 - i)$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ . ⑥  $\mathcal{S}$  التناظر المحوري الذي محوره  $(Ox)$ .

الجل

- ①  $z' = z + (-2 + 3i) = -1 + 4i$  ②  $z' = 3z = 3 + 3i$
- ③  $z' = e^{i\pi/4}z = \sqrt{2}i$  ④  $z' = 1 - 3i - (z - 1 + 3i) = 1 - 7i$
- ⑤  $z' = \bar{z} = 1 - i$  ⑥  $z' = 2 - i + e^{2\pi i/3}(z - 2 + i) = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$
- ② فيما يأتي يرتبط العددين العقديان  $a$  و  $b$  الممثلان للنقطتين  $A$  و  $B$  بالعلاقة المعطاة. عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرب النقطة  $B$  بالنقطة  $A$ :

$b = -ia$ ②	$b = a - 1 + 3i$ ①
$b = 2a$ ④	$b = \bar{a}$ ③
$b - i = e^{i\pi/3}(a - i)$ ⑥	$b - 1 = -(a - 1)$ ⑤
$b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a + 1 - i)$ ⑧	$b = a + 4 - 3i$ ⑦

الجل

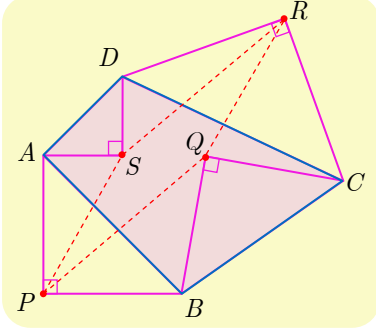
- ① صورة  $B$  وفق انسحاب شعاعه  $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$
- ② صورة  $B$  وفق الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .
- ③ صورة  $B$  وفق التناظر المحوري الذي محوره  $(Ox)$ .
- ④ صورة  $B$  وفق التحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته 2.
- ⑤ صورة  $B$  وفق التناظر المركزي الذي مركزه النقطة التي يمثلها العدد 1.
- ⑥ صورة  $B$  وفق الدوران الذي مركزه  $A(i)$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .
- ⑦ صورة  $B$  وفق انسحاب شعاعه  $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$
- ⑧ صورة  $B$  وفق الدوران الذي مركزه  $A(i - 1)$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .
- ③ لتكن النقطتان  $G(3 - i\sqrt{3})$  و  $H(3 + i\sqrt{3})$ . وليكن  $\mathcal{R}$  الدوران الذي مركزه  $O$  ويحقق  $\mathcal{R}(G) = H$ . احسب قياس الزاوية  $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ ، واستنتج الصيغة العقدية للدوران  $\mathcal{R}$ .

الجل

$$z' = e^{i\pi/3}z$$

## أنشطة

### نشاط 1 متوازي الأضلاع وربع الدائرة



نتأمل في مستو مزوّد بمعلم متجانس رباعياً محدباً  $ABCD$ . ونُنشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين  $PAB$  و  $QBC$  و  $RCD$  و  $SDA$  بحيث

$$(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}$$

نهدف إلى استعمال الأعداد العقدية في إثبات أنّ متوازي الأضلاع  $PQRS$ .

لنفترض أنّ الشكل مرسوم في المستوي الموجّه، وقد زوّدناه بمعلم متجانس مباشر. ولنرمز  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ ، وكذلك لنرمز  $p$  و  $q$  و  $r$  و  $s$  إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط  $P$  و  $Q$  و  $R$  و  $S$ .

① الدوران الذي مركزه  $P$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$  ينقل  $A$  إلى  $B$ . استعمال الصيغة العقدية لتثبت أنّ

$$p = \frac{1}{2}(a(1+i) + b(1-i))$$

② عبّر بالمثل عن  $q$  و  $r$  و  $s$  بدلالة  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$ .

③ تبيّن أنّ  $p + r = q + s$ ، ثمّ استنتج المطلوب.

الحل

① إذا كانت  $M'(z')$  هي صورة النقطة  $M(z)$  وفق الدوران الذي مركزه  $P$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ ، كان

$$z' = p + e^{-i\pi/2}(z - p) = p - i(z - p)$$

ولأنّ  $B$  هي صورة  $A$  وفق هذا الدوران استنتجنا أنّ  $b = p - i(a - p)$  أو  $b + ia = (1+i)p$

وبضرب الطرفين بالعدد  $(1-i)$  نستنتج أنّ  $p = \frac{1}{2}(a(1+i) + b(1-i))$ . (\*)

② لاحظ أنّ  $B$  هي صورة  $C$  وفق الدوران الذي مركزه  $Q$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ ، مثلما هي  $B$  صورة  $A$  وفق

الدوران الذي مركزه  $P$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ . إذن لنحصل على صيغة  $q$  يكفي أن نستبدل  $a \leftarrow c$  و  $p \leftarrow q$

في العلاقة (\*) لنجد  $q = \frac{1}{2}(c(1+i) + b(1-i))$ . وبالمثل، يفيد التبديل  $a \leftarrow c, b \leftarrow d, p \leftarrow r$  في

(\*) في حساب  $r$  :  $r = \frac{1}{2}(c(1+i) + d(1-i))$ ، وأخيراً التبديل  $a \leftarrow c, b \leftarrow d, p \leftarrow s$  في (\*) يتيح

حساب  $s$  :  $s = \frac{1}{2}(a(1+i) + d(1-i))$

③ نلاحظ إذن أنّ

$$p = \frac{1}{2}(a(1+i) + b(1-i)), \quad r = \frac{1}{2}(c(1+i) + d(1-i))$$

$$q = \frac{1}{2}(c(1+i) + b(1-i)), \quad s = \frac{1}{2}(a(1+i) + d(1-i))$$

ومن ثمّ

$$p + r = \frac{a+c}{2}(1+i) + \frac{b+d}{2}(1-i)$$

$$q + s = \frac{a+c}{2}(1+i) + \frac{b+d}{2}(1-i)$$

أي  $p + r = q + s$  أو  $\frac{p+r}{2} = \frac{q+s}{2}$  وهذه الأخيرة تعني أنّ قطرا الرباعي  $PQRS$  متناصفان، فهو إذن متوازي الأضلاع.

## نشاط 2 الجذور التكعيبية للواحد. المثلث المتساوي الأضلاع

نهدف في هذه الفقرة إلى تعيين حلول المعادلة  $z^3 = 1$  في  $\mathbb{C}$ ، ثمّ استعمال ذلك لإعطاء خاصّة مميّزة للمثلث متساوي الأضلاع.

- ① في حالة  $z \neq 0$  نرمز بالرمز  $r$  إلى طويّلة  $z$  وبالرمز  $\theta$  إلى زاويته من المجال  $[0, 2\pi[$ .
- ① تبيّن أنّ الشرط  $z^3 = 1$  يقتضي أن يكون  $r = 1$  و  $3\theta = 2\pi k$  حيث  $k$  عدد صحيح.
- ② تحقّق أنّ الشرط  $\theta \in [0, 2\pi[$  يقتضي في الحقيقة أنّ  $k \in \{0, 1, 2\}$ .
- ③ استنتج أنّ مجموعة حلول المعادلة  $z^3 = 1$  محتواة في  $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$ .
- ④ وبالعكس تحقّق أنّ كل عنصر من  $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$  هو حل للمعادلة  $z^3 = 1$ .
- ⑤ مثلّ النقاط  $M_0(1)$  و  $M_1(e^{2\pi i/3})$  و  $M_2(e^{4\pi i/3})$  في المستوي، وتبيّن أنّها تؤلّف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

نسَمّي حلول المعادلة  $z^3 = 1$  الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها بالرمز  $\mathbb{U}_3$ .



وكذلك نرمز إلى  $e^{2i\pi/3}$  بالرمز  $j$ . لاحظ أنّ  $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ .

⑥ تحقّق أنّ  $1 + j + j^2 = 0$  و  $\bar{j} = j^2 = e^{-2i\pi/3}$ .

② نزوّد المستوي بمعلم **متجانس مباشر**  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . وننأمّل ثلاث نقاط متباينة  $A$  و  $B$  و  $C$  تمثلها الأعداد العقدية  $a$  و  $b$  و  $c$ . نقول إنّ  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع **مباشر** إذا كنا عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب:  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  ندور في الاتجاه الموجب. وهذا يكافئ القول إنّ  $A$  هي صورة  $C$

وفق الدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$a + bj + cj^2 = 0$$

3 نقرن بكل عدد  $z \neq 1$ ، النقاط  $R(1)$  و  $M(z)$  و  $M'(\bar{z})$ .

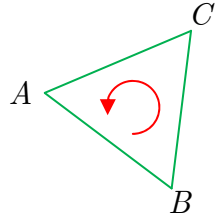
1 ما هي قيم  $z$  التي تجعل  $M$  و  $M'$  مختلفتين؟

2 نفترض تحقق الشرط السابق. أثبت أن  $\Delta$  مجموعة النقاط  $M(z)$  التي تجعل المثلث  $RMM'$  مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً، هي مستقيم محذوفة منه نقطة.

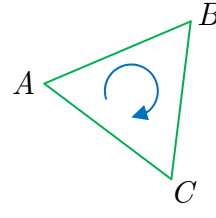
الحل

1 بسيط ومتروك للقارئ.

2 نوعان من المثلثات المتساوية الأضلاع.



مثلث متساوي الأضلاع مباشر



مثلث متساوي الأضلاع غير مباشر

إذا كانت  $M'(z')$  هي صورة النقطة  $M(z)$  وفق الدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ ، كان

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = a - j^2(z - a)$$

حيث استفدنا من كون  $e^{i\pi/3} = -j^2$ . الآن يكون  $ABC$  مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً إذا كانت  $C$  صورة  $B$  وفق الدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ ، أي  $c = a - j^2(b - a)$  وهذه تُكتب بالصيغة المكافئة  $c + j^2b - (1 + j^2)a = 0$ ، ولكن  $1 + j + j^2 = 0$  إذن  $c + j^2b + ja = 0$ . يكفي أن نضرب طرفي هذه المساواة بالمقدار  $j^2$  لنجد  $a + bj + cj^2 = 0$ .

3 1  $M \neq M'$  إذا وفقط إذا كان  $z \neq \bar{z}$  أي إذا وفقط إذا لم يكن  $z$  عدداً حقيقياً صرفاً.

2 نفترض أن  $z \neq \bar{z}$  عندئذ  $RMM'$  مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$1 + 2\operatorname{Re}(jz) = 0 \text{ أو } 1 + jz + j^2\bar{z} = 0$$

فإذا افترضنا  $z = x + iy$  كتبنا الشرطين السابقين كما يأتي

$$1 + \operatorname{Re}\left((-1 + \sqrt{3}i)(x + iy)\right) = 0 \text{ و } y \neq 0$$

أي  $1 - x - \sqrt{3}y = 0$  و  $y \neq 0$ . فالمجموعة  $\Delta$  هي المستقيم الذي معادلته  $\sqrt{3}y + x = 1$  باستثناء النقطة  $(1, 0)$ .



## تمارين ومسابقات

1 نتأمل النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية  $a = 8$  و  $b = -4 + 4i$  و  $c = -4i$ .

a. تحقق أن  $b - c = i(a - c)$ .

b. استنتج أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم ومتساوي الساقين.

2 نقرن بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'$  الموافقة للعدد العقدي  $z' = e^{i\pi/3}z$ .

a. ما التحويل الهندسي الموافق؟

b. احسب الأعداد العقدية  $a'$  و  $b'$  و  $c'$  الموافقة للنقاط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  صور  $A$  و  $B$  و  $C$  وفق هذا التحويل.

3 لتكن  $P$  و  $Q$  و  $R$  منتصفات القطع المستقيمة  $[A'B]$  و  $[B'C]$  و  $[C'A]$ ، ولتكن  $p$  و  $q$  و  $r$  الأعداد العقدية التي توافقها.

a. احسب  $p$  و  $q$  و  $r$ .

b. تحقق أن  $r - p = e^{i\pi/3}(q - p)$ .

c. استنتج أن المثلث  $PQR$  متساوي الأضلاع.

الحل

1 نحسب

$$b - c - i(a - c) = -4 + 4i + 4i - i(8 + 4i) = 8i - 4 - 8i + 4 = 0$$

فنستنتج أن  $b - c = i(a - c)$ . هذا يعني أن  $B$  هي صورة  $A$  وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول  $C$ . فالمثلث  $ABC$  مثلث قائم في  $C$  ومتساوي الساقين.

2 هي صورة  $M(z)$  وفق الدوران بزواوية قدرها  $\frac{\pi}{3}$  حول  $O$ . ولأن  $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  وجدنا

$$a' = 4 + 4\sqrt{3}i \quad \text{و} \quad b' = -2 - 2\sqrt{3} + (2 - 2\sqrt{3})i \quad \text{و} \quad c' = 2\sqrt{3} - 2i$$

3

$$p = \frac{a' + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i + (-4 + 4i)}{2} = 2(1 + \sqrt{3})i$$

$$q = \frac{b' + c}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3} + (2 - 2\sqrt{3})i + (-4i)}{2} = -1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i$$

$$r = \frac{c' + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2} = 4 + \sqrt{3} - i$$

ونجد

$$r - p = 4 + \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$$

$$q - p = -1 - \sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{3})i$$

$$e^{i\pi/3}(q - p) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}(-1 - \sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{3})i) = 4 + \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$$

إذن  $r - p = e^{i\pi/3}(q - p)$ ، والنقطة  $R$  هي صورة  $Q$  وفق دوران مركزه  $P$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ ، فالمثلث  $PQR$  مثلث متساوي الأضلاع.

**ملاحظة.** ربما كان من الأيسر الحل رمزياً دون تعويض قيم  $a$  و  $b$  و  $c$ . لنضع  $\omega = e^{i\pi/3}$  عندئذ

$$r = \frac{\omega c + a}{2}, q = \frac{\omega b + c}{2}, p = \frac{\omega a + b}{2}$$

ومن ثمَّ

$$q - p = \frac{1}{2}(-\omega a + (\omega - 1)b + c), \quad r - p = \frac{1}{2}((1 - \omega)a - b + \omega c)$$

$$\text{إذن } \omega(q - p) = \frac{1}{2}(-\omega^2 a + \omega(\omega - 1)b + \omega c) \text{ ومنه}$$

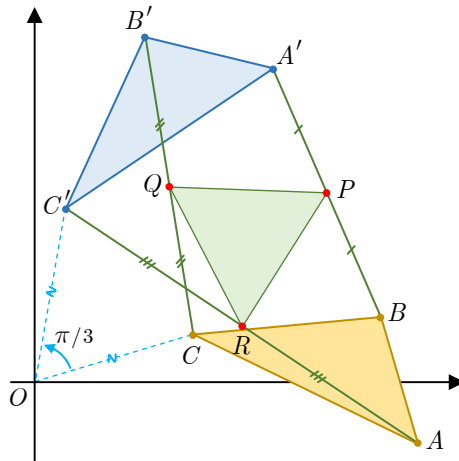
$$r - p - \omega(q - p) = \frac{1}{2}(1 - \omega + \omega^2)(a - b)$$

بقي أن نحسب المقدار  $1 - \omega + \omega^2$ . وهنا نلاحظ أنَّ

$$\omega^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{و} \quad \omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

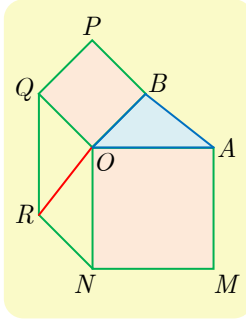
إذن  $1 - \omega + \omega^2 = 0$ . ومن ثمَّ  $r - p = \omega(q - p)$ ، والمثلث  $PQR$  مثلث متساوي الأضلاع.

في الشكل الآتي الذي يوضح الخاصية الهندسية التي أثبتناها في هذا التمرين، المثلث  $ABC$  هو مثلث كفي في المستوي.



2 نتأمل مثلثاً  $OAB$  فيه  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$  حيث  $\alpha \in ]0, \pi[$ . نُنشئ خارج هذا المثلث المربعين  $OAMN$  و  $OBPQ$  ومتوازي الأضلاع  $NOQR$ . نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أن المستقيمين  $(OR)$  و  $(AB)$  متعامدان وأن  $OR = AB$ ، وذلك باستعمال الأعداد العقدية.

لنختار معلماً متجانساً مباشراً  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . وليكن  $a$  و  $b$  العددين العقديين اللذين يمثلان  $A$  و  $B$ .



a. ما هي صور النقطتين  $N$  و  $B$  وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول  $O$ ؟

b. نرمز  $n$  إلى العدد العقدي الممثل للنقطة  $N$ ، و  $q$  للعدد العقدي الموافق للنقطة  $Q$ . أثبت أن  $n = -ia$  و  $q = ib$ .

a. عبّر عن  $\overrightarrow{OR}$  بدلالة  $\overrightarrow{ON}$  و  $\overrightarrow{OQ}$ .

b. استنتج العدد العقدي  $r$  الذي يمثّل النقطة  $R$  بدلالة  $a$  و  $b$ .

c. ما العدد العقدي المُمثّل للشعاع  $\overrightarrow{AB}$ ؟

d. أثبت إذن أن  $OR = AB$  وأن  $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ . واستنتج تعامد  $(OR)$  و  $(AB)$ .

### الحل

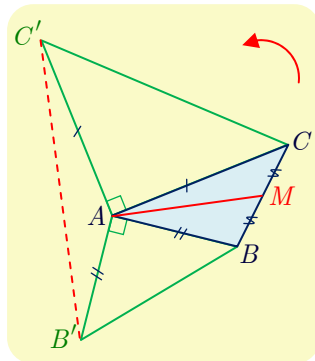
1 إذا كان  $\mathcal{R}$  هو الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول  $O$  كان  $\mathcal{R}(N) = A$  و  $\mathcal{R}(B) = Q$ . فإذا كانت صورة  $M(z')$  صورة  $M(z)$  وفق  $\mathcal{R}$  كان  $\mathcal{R}(z) = e^{i\pi/2}z = iz$  ومنه نرى أن  $a = in$  و  $q = ib$ . ومنه العلاقات المطلوبة.

2 لما كان  $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$  استنتجنا أن  $r = -ia + ib = i(b - a)$  ومن جهة أخرى  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  فالعدد العقدي  $w$  الممثل للشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هو  $w = b - a$  نستنتج إذن أن  $r = iw$ ، ومنه  $|r| = |w|$  أي  $OR = AB$  و  $\arg(r) = \frac{\pi}{2} + \arg(w)$  أي  $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ . ومن استناداً

إلى علاقة شال للزوايا الموجهة:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OR}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ ، فالمستقيمان  $(AB)$  و  $(OR)$  متعامدان.



### لنتعلم البحث معاً



### 3 دراسة شكل

نتأمل في المستوي  $ABC$  مثلثاً مباشراً التوجيه كفيلاً. لتكن  $M$  منتصف  $[AC]$ ، وليكن  $AB'B$  و  $ACC'$  مثلثين قائمين في  $A$  ومتساويي الساقين مباشرين. أثبت أن المتوسط  $(AM)$  في المثلث  $ABC$ ، هو ارتفاع في المثلث  $AB'C'$  وأن  $B'C' = 2AM$ .

## نحو الحل

نبدأ باختيار معلم مباشر مناسب. تؤدي النقطة  $A$  دوراً أساسياً، لذلك نعتبرها مبدأ لهذا المعلم. ونرمز بالرمزين  $b$  و  $c$  إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين  $B$  و  $C$ . احسب بدلالة  $b$  و  $c$  الأعداد العقدية  $b'$  و  $c'$  و  $m$  المُمثلة للنقاط  $B'$  و  $C'$  و  $M$  بالترتيب.

نهدف إلى إثبات أن  $\overrightarrow{B'C'}$  عمودي على  $\overrightarrow{AM}$ ، الذي يؤول إلى إثبات أن

$$\frac{B'C'}{AM} = 2 \quad \text{وأن} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = +\frac{\pi}{2}$$

ومنه تأتي فكرة حساب النسبة  $\frac{c' - b'}{m - a}$ ، التي تعطي مباشرة جميع المعلومات المطلوبة. احسب هذه النسبة واستنتج الخاصة المطلوبة.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

## الحل

فإذا كانت  $M'(z')$  صورة  $M(z)$  وفق  $\mathcal{R}$ ، الدوارن ربع دورة بالاتجاه الموجب حول  $A$ ، كان  $z' = e^{i\pi/2}z = iz$ ، ولأن  $C' = \mathcal{R}(C)$  و  $B = \mathcal{R}(B')$  استنتجنا أن  $c' = ic$  و  $b' = -ib$ . وأخيراً

$$\text{لأن } M \text{ منتصف } [BC] \text{ استنتجنا أن } m = \frac{1}{2}(b + c).$$

لنحسب العدد العقدي  $w = \frac{c' - b'}{m - a}$ . إذ لدينا

$$\arg w = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) \quad \text{و} \quad |w| = \frac{B'C'}{AM}$$

وهما المقداران المطلوب تعيينهما. في الحقيقة لدينا  $a = 0$  و من ثم

$$w = \frac{c' - b'}{m - a} = \frac{ic + ib}{\frac{1}{2}(b + c)} = 2i$$

وهذا يبرهن أن  $|w| = 2$  و  $\arg w = \frac{\pi}{2}$ ، ومن ثم  $B'C' = 2AM$  و  $(AM)$  عمودي على  $(B'C')$  كما هو مطلوب.

## 4 البحث عن مجموعة

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . نقرن كل نقطة  $M(z)$  حيث  $z \neq i$  بالنقطة

$$M(z') \text{ حيث } z' = \frac{z + 2}{z - i}.$$

- عيّن  $\Delta$  مجموعة النقاط  $M$  التي يكون عندها  $z'$  عدداً حقيقياً.
- عيّن  $\Gamma$  مجموعة النقاط  $M$  التي يكون عندها  $z'$  عدداً تخيلياً بحتاً.

التفسير الهندسي: الشرط  $z'$  عددٌ حقيقي يُكافئ القول  $\text{Im}(z') = 0$  أو  $z' = \bar{z}'$ ، أو  $\arg z' \in \{0, \pi\}$

(في حالة  $z' \neq 0$ ). ولأن  $z'$  من الشكل  $\frac{z-a}{z-b}$  وجدنا من المناسب استعمال الخاصة الأخيرة.

لنرمز  $a$  و  $b$  و  $z$  إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط  $A$  و  $B$  و  $M$ . ما الزاوية بين شعاعين

التي يقيسها المقدار  $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$  ؟

لوضع  $z'$  بالشكل  $\frac{z-a}{z-b}$ ، نكتب  $z' = \frac{z-(-2)}{z-i}$ ، ونعرّف النقطتين  $A(i)$  و  $B(-2)$ .

① وضع هاتين النقطتين.

② تحقق أن  $z'$  حقيقي إذا وفقط إذا كان  $M = B$  أو  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in \{0, \pi\}$ .

③ مثل المجموعة  $\Delta$  وعين طبيعتها الهندسية. (لا تنس أن  $z \neq i$  ومن ثم  $M \neq A$ ).

④ عين بالمثل المجموعة  $\Gamma$  ومثلها هندسياً.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

الحل

باتباع الخطوات المشار إليها. نعرّف النقطتين  $A(i)$  و  $B(-2)$ . عندئذ تنتمي  $M(z)$  إلى  $\Delta$  إذا وفقط

إذا كان  $z = z_B$  أو  $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 0$  ( $\pi$ ) وهذا يكافئ القول إن  $M = B$  أو إن الزاوية الموجهة

للشعاعين  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{BM}$  تساوي 0 أو  $\pi$ :  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \in \{0, \pi\}$ . هذا يعني أن الشعاعين  $\overrightarrow{AM}$

و  $\overrightarrow{BM}$  مرتبطان خطياً، أو أن النقطة  $M$  تقع على المستقيم  $(AB)$  ومختلفة عن  $A$ . إذن

$$\Delta = (AB) \setminus \{A\}$$

بالمثل، تنتمي  $M(z)$  إلى  $\Gamma$  إذا وفقط إذا كان  $z = z_B$  أو  $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$  ( $2\pi$ ) وهذا يكافئ

القول إن  $M = B$  أو إن الزاوية الموجهة للشعاعين  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{BM}$  تساوي  $\pm \frac{\pi}{2}$ ، أي إنهما متعامدان.

فالنقطة  $M$  تنتمي إلى مجموعة النقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة  $[AB]$  تحت زاوية قائمة

باستثناء النقطة  $A$ . هي إذن الدائرة التي قطرها  $[AB]$  محذوفاً منها النقطة  $A$ . وعليه  $\Gamma$  هي الدائرة

التي قطرها  $[AB]$  محذوفاً منها النقطة  $A$ . ونترك مهمة رسم  $\Delta$  و  $\Gamma$  للقارئ.



## قُدماً إلى الأمام

### 5 خاصة مميزة لمنازلي الأضلاع

تمثل الأعداد العقدية  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أربع نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ . أثبت أن الرباعي  $ABCD$  يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان  $a + c = b + d$ .

الحل

يكون  $ABCD$  متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا تتناصف قطراه. ولكن العدد العقدي الذي يمثل منتصف  $[AC]$  هو  $\frac{a+c}{2}$ ، والعدد العقدي الذي يمثل منتصف  $[BD]$  هو  $\frac{b+d}{2}$  وينطبق المنتصفان إذا وفقط إذا كان  $a + c = b + d$ .

### 6 حساب النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$ .

نتأمل النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين يمثلها العدان  $a = 2$  و  $b = 2e^{3i\pi/4}$ . وليكن  $I$  منتصف  $[AB]$ .

a. ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث  $OAB$ .

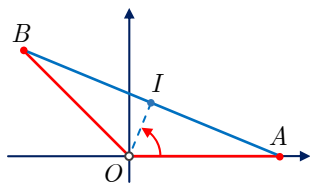
b. استنتج قياساً للزاوية  $(\vec{u}, \vec{OI})$ .

a. احسب العدد العقدي  $z_I$  المُمثل للنقطة  $I$  بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتج كلاً من  $\cos \frac{3\pi}{8}$  و  $\sin \frac{3\pi}{8}$ .

الحل

المثلث  $OAB$  مثلث متساوي الساقين رأسه  $O$ . المستقيم  $(OI)$  متوسط في هذا المثلث فهو منتصف زاوية رأسه، ومنه  $(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$ .



هنا  $z_I = \frac{1}{2}(a + b) = 1 + e^{3\pi i/4}$  إذن من جهة أولى لدينا

$$z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

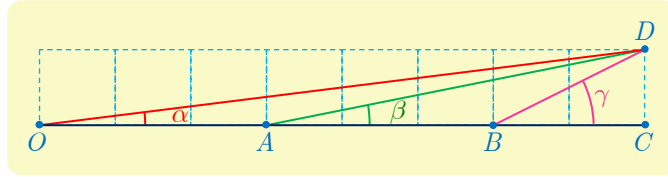
ومن جهة ثانية  $z_I = |z_I| \cdot e^{3\pi i/8} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{3\pi i/8}$  وهكذا نجد أن

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \quad \text{أو}$$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليين نجد  $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$  و  $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$ .

7 تأمل الشكل واحسب المجموع  $\alpha + \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  هي القياسات الأساسية للزوايا الموجبة  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ ، و  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  و  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$  بالترتيب.



الحل

لاحظ أولاً أن كلاً من الزوايا  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  أصغر من  $\frac{\pi}{4}$ . فمجموعها  $\theta = \alpha + \beta + \gamma$  ينتمي إلى المجال  $]0, \pi[$ .

- الشعاع  $\overrightarrow{OD}$  يمثل العدد العقدي  $8 + i = \sqrt{65} e^{i\alpha}$ .
- الشعاع  $\overrightarrow{AD}$  يمثل العدد العقدي  $5 + i = \sqrt{26} e^{i\beta}$ .
- الشعاع  $\overrightarrow{BD}$  يمثل العدد العقدي  $2 + i = \sqrt{5} e^{i\gamma}$ .

نستنتج إذن أن

$$\sqrt{65}\sqrt{26}\sqrt{5}e^{i\theta} = (2 + i)(5 + i)(8 + i)$$

أو

$$65\sqrt{2}e^{i\theta} = i^3 + 15i^2 + 66i + 80 = 65(1 + i)$$

وأخيراً  $e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ . إذن  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ولكن  $\theta$  زاوية من  $]0, \pi[$ ، فلا بد أن يكون  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

8 نقرن بكل نقطة  $M(z)$  من المستوي حيث  $z \neq -\frac{1}{2}i$  النقطة  $M'$  التي يمثلها العدد العقدي

$z' = \frac{z + 2i}{1 - 2iz}$ . لتكن  $\Gamma$  الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1. أثبت أنه إذا انتمت  $M$  إلى

$\Gamma$  انتمت  $M'$  إلى  $\Gamma$  أيضاً. أياً يكون العكس صحيحاً؟

الحل

تنتمي نقطة إلى الدائرة  $\Gamma$  إذا وفقط إذا كانت طوليتها تساوي الواحد لذلك سنسعى إلى مقارنة طولية  $z'$  بالواحد، وهذا يكافئ مقارنة مربع طولية  $z'$  بالواحد. التعامل مع مربع طولية عدد عقدي أمر يسير لأنه يساوي جداء ضرب هذا العدد بمرافقه.

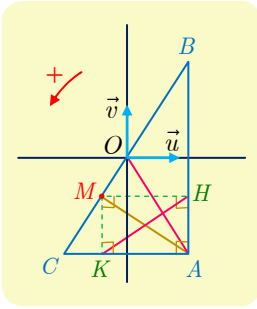
لنحسب إذن المقدار  $|z'|^2 - 1$  في حالة  $z' = \frac{z + 2i}{1 - 2iz}$ .

$$\begin{aligned} |z'|^2 - 1 &= \frac{|z + 2i|^2}{|1 - 2iz|^2} - 1 = \frac{|z + 2i|^2 - |1 - 2iz|^2}{|1 - 2iz|^2} \\ &= \frac{(z + 2i)(\bar{z} - 2i) - (1 - 2iz)(1 + 2i\bar{z})}{|1 - 2iz|^2} \end{aligned}$$

إذن

$$|z'|^2 - 1 = \frac{|z|^2 + 4 + 2i\bar{z} - 2iz - 1 - 4|z|^2 + 2iz - 2i\bar{z}}{|1 - 2iz|^2} = \frac{3(1 - |z|^2)}{|1 - 2iz|^2}$$

من هذه المساواة نرى أنه يوجد تكافؤ بين الخاصتين  $|z|^2 - 1 = 0$  و  $|z'|^2 - 1 = 0$ ، فإذا تحققت الأولى تحققت الثانية وبالعكس. وعليه تنتمي  $M(z)$  إلى  $\Gamma$  (أي  $|z| = 1$ ) إذا وفقط إذا انتمت النقطة  $M'(z')$  إلى  $\Gamma$  (أي  $|z'| = 1$ ).



## 9 مسألة تعامد

نتأمل في المستوي الموجّه، مثلثاً مباشراً  $ABC$  قائماً في  $A$ . النقطة  $M$  هي المسقط القائم للنقطة  $A$  على  $(BC)$  بالترتيب، و  $H$  و  $K$  هما المسقطان القائمان للنقطة  $M$  على  $(AB)$  وعلى  $(AC)$  بالترتيب. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين  $(OA)$  و  $(HK)$ .

نختار معلماً متجانساً ومباشراً  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  بحيث تقع  $O$  في منتصف  $[BC]$  ويكون  $\vec{u}$  عمودياً على  $(AB)$  و  $\vec{v}$  شعاعاً موجّهاً للمستقيم  $(AB)$ . ونرمز  $a, b, c, h, k, m$  إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط  $A, B, C, H, K, M$ .

$$\textcircled{1} \text{ علّل ما يأتي : } a = \bar{b} \text{ و } a - m = \overline{h - k}$$

$$\textcircled{2} a. \text{ أثبت أن } \arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$b. \text{ استنتج أن } \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ أو } \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ ثم أثبت المطلوب.}$$

الحل

$\textcircled{1}$  لأن  $B$  نظيرة  $A$  بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أن  $a = \bar{b}$ . الرباعي  $AHMK$  مستطيل.

فيكون لدينا من جهة أولى  $\overrightarrow{MA} = \text{Re}(a - m)\vec{u} + \text{Im}(a - m)\vec{v}$  إذن

$$\overrightarrow{HA} = \text{Im}(a - m)\vec{v} \text{ و } \overrightarrow{MH} = \text{Re}(a - m)\vec{u}$$



ومن جهة ثانية  $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA} = \text{Re}(a - m)\vec{u} - \text{Im}(a - m)\vec{v}$  ، إذن

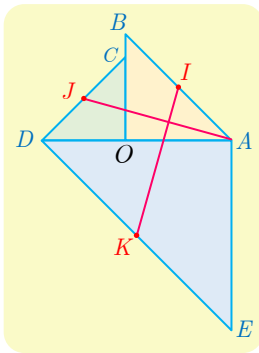
$$\text{Im}(h - k) = -\text{Im}(a - m) \text{ و } \text{Re}(h - k) = \text{Re}(a - m)$$

وهذا يكافئ  $a - m = \overline{h - k}$

② الشعاعان  $\overrightarrow{OB}$  و  $\overrightarrow{MA}$  متعامدان، أي  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$  أو  $\arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$

أي  $\arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \mp \frac{\pi}{2} (2\pi)$  ومن ثم  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{KH}) = \mp \frac{\pi}{2} (2\pi)$  أي

فالمستقيمان  $(OA)$  و  $(HK)$  متعامدان.



10 نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور. المثلثات  $OAB$  و  $OCD$

و  $ADE$  مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط  $I$  و  $J$  و  $K$  هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين  $(AJ)$  و  $(IK)$  وأن  $IK = AJ$ . نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه  $O$ . ونرمز  $a$  و  $c$  إلى العددين العقديين المُمثلين للنقطتين  $A$  و  $C$ .

①  $a$ . عبر بدلالة  $a$  و  $c$  عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط  $B$  و  $D$  و  $E$ .

$b$ . استنتج الأعداد العقدية  $z_I$  و  $z_J$  و  $z_K$  التي تمثل النقاط  $I$  و  $J$  و  $K$ .

② أثبت أن  $z_K - z_I = i(z_J - a)$ . ثم استنتج الخواص المطلوبة.

الحل

إذا كانت  $M'(z')$  صورة  $M(z)$  وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول  $O$ ، الذي نرمّزه  $\mathcal{R}$ ، كان

$$z' = e^{i\pi/2}z = iz$$

لما كان  $B = \mathcal{R}(A)$ ، و  $D = \mathcal{R}(C)$ ، كان  $b = ia$  و  $d = ic$ . ولأن  $E$  هي صورة  $d$  وفق الدوران

ربع دورة بالاتجاه الموجب حول  $a$  كان  $e - a = i(d - a)$  ومنه

$$e = a + i(ic - a) = (1 - i)a - c$$

إذن

$$z_I = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1 + i}{2}a$$

$$z_J = \frac{1}{2}(c + d) = \frac{1 + i}{2}c$$

$$z_K = \frac{1}{2}(e + d) = \frac{1 - i}{2}(a - c)$$

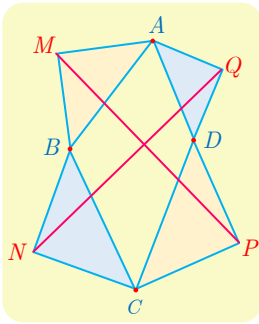
ومنه

$$\begin{aligned} z_K - z_I - i(z_J - a) &= \frac{1-i}{2}(a-c) - \frac{1+i}{2}a - i\left(\frac{1+i}{2}c - a\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-i-1-i+2i)a + \frac{1}{2}(-1+i-i+1)c = 0 \end{aligned}$$

إذن  $z_K - z_I = i(z_J - a)$  وعليه

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } |z_K - z_I| = |z_J - a|$$

أي  $IK = AJ$  و  $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$ ، فالمستقيمان  $(AJ)$  و  $(IK)$  متعامدان.



11 نتأمل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً  $ABCD$ . نُنشئ خارجه

النقاط  $M$  و  $N$  و  $P$  و  $Q$  التي تجعل المثلثات  $MBA$  و  $NCB$  و  $PDC$  و  $DQA$  قائمة في  $M$  و  $N$  و  $P$  و  $Q$  بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

أثبت باستعمال الأعداد العقدية أنّ  $MP = NQ$  وأنّ المستقيمين  $(MP)$  و  $(NQ)$  متعامدان.

الحل

إذا كانت  $M'(z')$  صورة  $M(z)$  وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول نقطة  $\Omega(\omega)$ ، كان

$$z' - \omega = e^{i\pi/2}(z - \omega) = iz - i\omega$$

ومن ثمّ تتعيّن  $\omega$  من  $z$  و  $z'$  بالعلاقة :

$$\omega = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-i)z$$

- $A$  هي صورة  $B$  وفق دوران ربع دورة مباشرة حول  $M$ ، إذن  $m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$
- $B$  هي صورة  $C$  وفق دوران ربع دورة مباشرة حول  $N$ ، إذن  $n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$
- $C$  هي صورة  $D$  وفق دوران ربع دورة مباشرة حول  $P$ ، إذن  $p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$
- $D$  هي صورة  $A$  وفق دوران ربع دورة مباشرة حول  $Q$ ، إذن  $q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$

وعليه نرى أن

$$\begin{aligned} p - m &= -\frac{1}{2}(1+i)a - \frac{1}{2}(1-i)b + \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d \\ q - n &= +\frac{1}{2}(1-i)a - \frac{1}{2}(1+i)b - \frac{1}{2}(1-i)c + \frac{1}{2}(1+i)d \\ i(p - m) &= +\frac{1}{2}(1-i)a - \frac{1}{2}(1+i)b - \frac{1}{2}(1-i)c + \frac{1}{2}(1+i)d \end{aligned}$$

إذن  $q - n = i(p - m)$  وهذه تعني أن

$$\arg\left(\frac{q - n}{p - m}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad |q - n| = |p - m|$$

إذن  $MP = NQ$  والمستقيمان  $(MP)$  و  $(NQ)$  متعامدان.

**12** نتأمل في المستوي الموجه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً  $ABC$  مركزه النقطة  $I$ .  $D$  نقطة من

داخل القطعة المستقيمة  $[BC]$ . نُنشئ مثلثين متساوي الأضلاع مباشرين  $BED$  و  $DFC$ .

ونعرّف  $J$  و  $K$  مركزي المثلثين  $BED$  و  $DFC$ . نهدف إلى إثبات أن المثلث  $IJK$  متساوي

الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً  $(B, \vec{u}, \vec{v})$  بحيث  $\vec{BC} = a\vec{u}$  حيث  $a = BC$ .

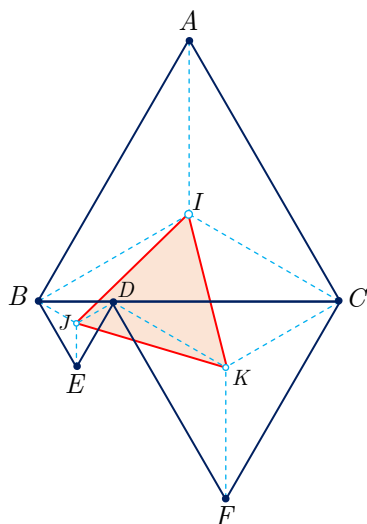
① احسب، بدلالة  $a$ ، العددين العقديين  $z_I$  و  $z_A$  اللذين يمثلان  $I$  و  $A$  بالترتيب.

② نفترض أن  $\vec{BD} = t\vec{BC}$  حيث  $t \in ]0,1[$ . احسب بدلالة  $a$  و  $t$ ، العددين العقديين  $z_J$

و  $z_K$  اللذين يمثلان  $J$  و  $K$  بالترتيب.

③ تحقق أن  $z_K - z_I = e^{i\pi/3}(z_J - z_I)$ ، واستنتج الخاصة المرجوة.

الحل



① هي صورة  $C$  وفق الدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ ، فإذا

وضعنا تسهياً للكتابة  $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، كان  $z_A = \omega a$ .

وكان  $z_I = \frac{1}{3}(z_B + z_C + z_A) = \frac{1+\omega}{3}a$

② من  $\vec{BD} = t\vec{BC}$  نستنتج أن  $z_D = ta$  لأن  $z_B = 0$

و  $z_C = a$ . والنقطة  $E$  هي صورة  $D$  وفق الدوران الذي مركزه

$B$  وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$ ، إذن  $z_E = \bar{\omega}z_D = t\bar{\omega}a$  ومنه

$$z_J = \frac{1}{3}(z_B + z_D + z_E) = \frac{1+\bar{\omega}}{3}ta$$

النقطة  $F$  هي صورة  $D$  وفق الدوران الذي مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ ، إذن  $z_F - z_C = \omega(z_D - z_C)$

ومنه  $z_F = (1 - \omega)a + \omega ta$ . نستنتج إذن أن

$$z_K = \frac{1}{3}(z_C + z_D + z_F) = \frac{1}{3}((2 - \omega)a + (1 + \omega)ta)$$

ومنه

$$z_K - z_I = \frac{1}{3}((1 - 2\omega)a + (1 + \omega)ta)$$

$$z_J - z_I = \frac{1}{3}((1 + \bar{\omega})ta - (1 + \omega)a)$$

$$\omega(z_J - z_I) = \frac{1}{3}((\omega + 1)ta - (\omega + \omega^2)a)$$

$$z_K - z_I - \omega(z_J - z_I) = \frac{1}{3}(1 - \omega + \omega^2)a$$

ولكن  $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  و  $\omega^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  إذن  $1 - \omega + \omega^2 = 0$ . فنكون قد أثبتنا

أن  $z_K - z_I = \omega(z_J - z_I)$  أي إن  $K$  هي صورة  $J$  وفق الدوران الذي مركزه  $I$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

فالمثلث  $IJK$  مثلث متساوي الأضلاع.

**تنمة.** بين أن مركز المثلث  $IJK$  يقع على القطعة المستقيمة  $[BC]$ .

**13** نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . النقاط  $A$  و  $A'$  و  $B$  و  $B'$  هي النقاط

الموافقة للأعداد العقدية  $1$  و  $-1$  و  $i$  و  $-i$  بالترتيب.

نقرن كل نقطة  $M(z)$  مختلفة عن النقاط  $O$  و  $A$  و  $A'$  و  $B$  و  $B'$  والنقطتين  $M_1(z_1)$  و  $M_2(z_2)$

بحيث يكون المثلثان  $BMM_1$  و  $AMM_2$  قائمين ومتساويي الساقين بحيث

$$\overrightarrow{(M_1B, M_1M)} = \overrightarrow{(M_2M, M_2A)} = \frac{\pi}{2}$$

① ارسم شكلاً مناسباً.

② **a.** علّل صحة المساواتين  $z - z_1 = i(i - z_1)$  و  $1 - z_2 = i(z - z_2)$ .

**b.** عبّر عن  $z_1$  و  $z_2$  بدلالة  $z$ .

③ نهدف إلى تعيين النقاط  $M$  التي تجعل المثلث  $OM_1M_2$  مثلثاً متساوي الأضلاع.

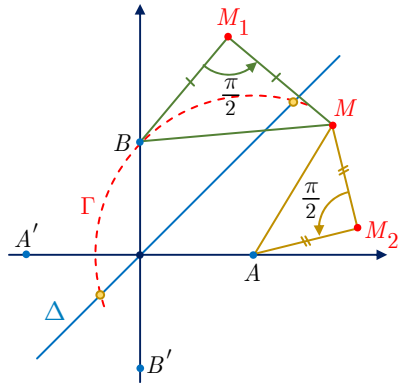
**a.** أثبت أن الشرط  $OM_1 = OM_2$  يكافئ  $|z + 1| = |z + i|$  واستنتج  $\Delta$  مجموعة النقاط

$M$  التي تجعل  $OM_1 = OM_2$ ، وارسم  $\Delta$  على الشكل نفسه.

**b.** أثبت أن الشرط  $OM_1 = M_1M_2$  يكافئ  $|z + 1|^2 = 2|z|^2$ .

**c.** استنتج  $\Gamma$  مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق  $OM_1 = M_1M_2$ ، وارسم  $\Gamma$  على الشكل نفسه.

d. استنتج مما سبق النقاط  $M$  التي تجعل  $OM_1M_2$  مثلثاً متساوي الأضلاع. وحددها على الشكل.



الحل

② إن  $M$  هي صورة  $B$  وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول  $M_1$  إذن  $z - z_1 = e^{i\pi/2}(i - z_1)$ ، أو  $z - z_1 = i(i - z_1)$  وبالمثل إن  $A$  هي صورة  $M$  وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول  $M_2$  إذن  $1 - z_2 = i(z - z_2)$  نستنتج إذن أنّ

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1-iz) \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1}{2}(1+i)(z+1)$$

③ a. الشرط  $OM_1 = OM_2$  يكافئ  $|z_1| = |z_2|$  وهذا بدوره يكافئ

$$|z+1| = |1-iz| = |(-i)(i+z)| = |-i||i+z| = |i+z|$$

أو  $|z - z_{B'}| = |z - z_{A'}|$ . إذن مجموعة النقاط  $M$  التي تجعل  $OM_1 = OM_2$  هي مجموعة النقاط المتساوية البعد عن  $A'$  و  $B'$ ، فهي إذن محور القطعة  $[A'B']$ ، أي منتصف الربع الأول.

b. نلاحظ أنّ  $z_2 - z_1 = -\frac{(1+i)^2}{2}z = -iz$  إذن  $M_1M_2 = |z|$  و  $OM_1 = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1+z|$  إذن الشرط يكافئ  $|1+z|^2 = 2|z|^2$ .

c. تنتمي  $M(z)$  إلى  $\Gamma$  مجموعة النقاط التي تحقق  $M_1M_2 = OM_1$  إذا وفقط إذا تحقق الشرط  $|1+z|^2 = 2|z|^2$ ، ولكن نعلم من متطابقة متوازي الأضلاع أنّ  $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2|z|^2 + 2$  فالشرط  $|1+z|^2 = 2|z|^2$  يكافئ إذن أنّ  $|z-1|^2 = 2$  أو  $|z-1| = \sqrt{2}$ . فالمجموعة  $\Gamma$  هي الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها  $\sqrt{2}$ ، أي الدائرة التي مركزها  $A$  وتمر بالنقطة  $B$ .

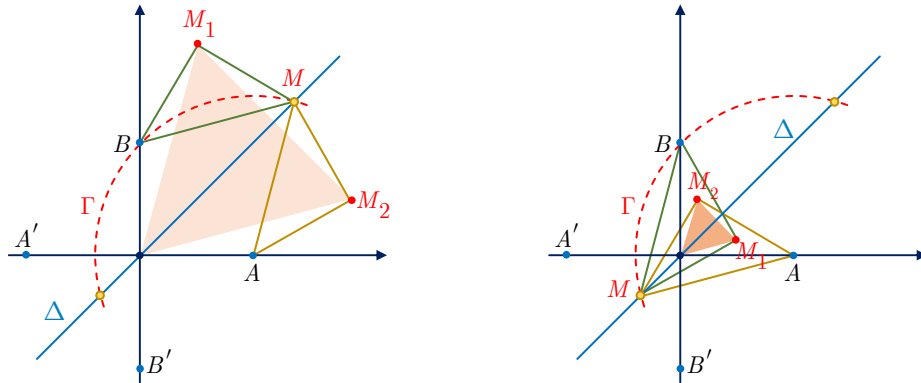
d. إذن يكون المثلث  $OM_1M_2$  متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا انتمت  $M$  إلى تقاطع المجموعتين  $\Gamma$  و  $\Delta$ . تنتمي  $z$  إلى  $\Delta$  إذا كانت  $z = t(1+i)$  حيث  $t$  عدد حقيقي نعيّنه بشرط انتماء  $M$  إلى  $\Gamma$  أي  $|1+t(1+i)|^2 = 2|t(1+i)|^2$  وهذه تكافئ  $(1+t)^2 + t^2 = 4t^2$  أو  $2t^2 - 2t - 1 = 0$ ، ومنه

$$t \in \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\}$$

وعلى هذا يكون  $OM_1M_2$  متساوي الأضلاع، إذا وفقط كان العدد العقدي الممثل للنقطة  $M$  واحداً من

$$\left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i), \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i) \right\} \text{ :بين}$$

يبين الشكل الآتي الأوضاع التي يكون عندها المثلث المدرس متساوي الأضلاع



# 6

## التحليل التوافقي

1 إنشاء قوائم من عناصر مجموعة

2 التوافيق

3 خواص عدد التوافيق  $\binom{n}{r}$ ، ومنشور ذي الحدّين

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- إنشاء قوائم من عناصر مجموعة: الترتيب، التباديل والتوافيق.
- المبدأ الأساسي في العدّ.
- عدد الترتيب، عدد التوافيق، العاملّي وخواص هذه الأعداد
- منشور ذي الحدين،
- تطبيقات منشور ذي الحدين في تحويل بعض العبارات المثلثية.



## تَدْرِبْ صَفْحَةَ 152

① اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{7! \times 5!}{10!} & \textcircled{5} & \frac{6 \times 4!}{5!} & \textcircled{4} & \frac{6! - 5!}{5!} & \textcircled{3} & \frac{17!}{15!} & \textcircled{2} & \frac{21!}{20!} & \textcircled{1} \\ \frac{6! + 7!}{2!3!4!} & \textcircled{10} & \frac{9!}{6! \times 3!} & \textcircled{9} & \frac{9!}{5! \times 4!} & \textcircled{8} & \frac{6!}{(3!)^2} & \textcircled{7} & \frac{1}{5!} - \frac{42}{7!} & \textcircled{6} \end{array}$$

الجل

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{6} & \textcircled{5} & \frac{6}{5} & \textcircled{4} & 5 & \textcircled{3} & 272 & \textcircled{2} & 21 & \textcircled{1} \\ 20 & \textcircled{10} & 84 & \textcircled{9} & 126 & \textcircled{8} & 20 & \textcircled{7} & 0 & \textcircled{6} \end{array}$$

② اختزل المقادير الآتية:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!} & \textcircled{3} & \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} & \textcircled{2} & \frac{(n+1)!}{(n-1)!} & \textcircled{1} \\ \frac{(2n)!}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1)} & \textcircled{6} & \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} & \textcircled{5} & \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} & \textcircled{4} \end{array}$$

الجل

$$\begin{array}{ccccc} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} = P_{2n-1}^n & \textcircled{3} & 2n(2n+1) & \textcircled{2} & n(n+1) & \textcircled{1} \\ 2^n n! & \textcircled{6} & \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n-1)!} & \textcircled{5} & \frac{1}{n(n+1)} & \textcircled{4} \end{array}$$

③ اكتب جميع تباديل المجموعة  $E = \{a, b, c, d\}$

الجل

عدد تباديل هذه المجموعة يساوي  $4! = 24$ . وهذه التباديل مبينة في الجدول الآتي:

*dabc cabc bacd abcd*  
*dacb cadb badc abdc*  
*dbac cbad bcad acbd*  
*dbca cbda bcda acdb*  
*dcab cdab bdac adbc*  
*dcba cdba bdca adcb*

④ لتكن المجموعة  $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

- ① كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة  $S$ ؟
- ② كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة  $S$ ؟
- ③ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة  $S$ ؟

## الحل

① هناك خمسة خيارات للأحاد وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك  $5 \times 5 = 25$  عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة  $S$ .

② هناك خمسة خيارات للأحاد و فقط أربعة خيارات للعشرات؛ إذ لا يمكن اختيار العدد الموافق للأحاد مجدداً، إذن هناك  $5 \times 4 = 20$  عدداً مختلف الأرقام مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة  $S$ .

③ هناك خياران فقط للأحاد؛ إذ يجب أن يكون الرقم زوجياً، وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك  $2 \times 5 = 10$  أعداد زوجية مؤلفة من منزلتين يمكن تشكيلها من عناصر المجموعة  $S$ .

⑤ في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

## الحل

هناك خياران للمهندس وأربعة خيارات للعامل، إذن يمكن تأليف  $2 \times 4 = 8$  لجنة مختلفة لمتابعة أعمال الصيانة.

⑥ يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٍ للنادي؟

## الحل

هناك سبعة خيارات للرئيس، فتنقى ستة خيارات لنائبه، وبعدها يبقى لدينا خمسة خيارات لأمين السر. إذن هناك  $7 \times 6 \times 5 = 210$  خياراً مختلفاً للفريق المكوّن من رئيس مجلس إدارة النادي ونائبه، وأمين سره.

⑦ اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساوي).

## الحل

هناك 100 خياراً للحصول على الميدالية الذهبية، فيبقى بعدها 99 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية الفضية، وبعد توزيع الأخيرة يبقى 98 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية البرونزية. إذن هناك  $100 \times 99 \times 98 = 970200$  توزيعاً ممكناً للميداليات الثلاث على المتسابقين.

## تَدْرِبْ صفحة 155

① اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال :

$$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} \quad \text{⑥} \quad \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} \quad \text{⑤} \quad \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} \quad \text{④} \quad \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \quad \text{③} \quad \binom{12}{8} \quad \text{②} \quad \binom{6}{2} \quad \text{①}$$

الحل

$$\frac{1}{10} \quad \text{⑥} \quad \frac{2}{3} \quad \text{⑤} \quad \frac{25}{14} \quad \text{④} \quad \frac{1}{4} \quad \text{③} \quad 495 \quad \text{②} \quad 15 \quad \text{①}$$

② أثبت صحة المساواة  $n \binom{n-1}{r-1} = r \binom{n}{r}$  في حالة  $n \geq 2$  و  $1 \leq r \leq n$ .

الحل

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{r-1} &= n \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot ((n-1) - (r-1))!} = \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{r}{r} \cdot \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} = r \cdot \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = r \binom{n}{r} \end{aligned}$$

③ عيّن الأعداد الطبيعية  $n$  التي تتحقّق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2} \quad \text{③} \quad 3 \binom{n}{4} = 14 \binom{n}{2} \quad \text{②} \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \text{①}$$

الحل

①  $\binom{n}{2} = 36$  تعني  $\frac{n(n-1)}{2} = 36$  أي  $n(n-1) = 72$  أو  $(n-9)(n+8) = 0$ ، ولكن  $n$  عدداً طبيعياً، إذن  $n+8 > 0$  ولا بُدّ أن يكون  $n-9 = 0$  أو  $n = 9$ .

② إذا كان  $n$  عدداً يحقّق  $3 \binom{n}{4} = 14 \binom{n}{2}$  لوجب أن يكون عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 4 ولوجب أيضاً أن تتحقّق المساواة

$$3 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 14 \frac{n(n-1)}{2}$$

وهذه تكافئ  $n(n-1)((n-2)(n-3) - 56) = 0$  أو  $n(n-1)(n+5)(n-10) = 0$ ، ولأن  $n$  عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 4 استنتجنا مما سبق أنّ  $n$  يجب أن يساوي 10. ونتحقّق مباشرة أنّ  $n = 10$  هو حلّ للمعادلة المعطاة.

③ أيّ حلّ للمعادلة  $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$  هو عدد طبيعي  $n$  يحقّق  $0 \leq 3n \leq 10$  أي هو أحد الأعداد  $\{0, 1, 2, 3\}$ . وهذه حالة بسيطة جداً إذ يكفي أن نحسب الطرفين عند هذه القيم، فنجد المساواة غير محقّقة في حالة  $n \in \{0, 3\}$  ونجدها محقّقة في حالة  $n \in \{1, 2\}$ ، إذن مجموعة الحلول هي  $\{1, 2\}$ .

④ نريد تأليف لجنة مكوّنة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة.

① كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

② كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟

الحل

① لدينا 29 شخصاً ونريد اختيار مجموعة جزئية (لجنة) من بينهم عدد عناصرها أربعة. هناك إذن هناك

$$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23751$$

خياراً ممكناً.

② لدينا 15 رجلاً ونريد اختيار مجموعة جزئية من بينهم مكونة من عنصرين، ولدينا  $\binom{15}{2}$  خياراً ممكناً،

ولدينا أيضاً 14 امرأة ونريد اختيار مجموعة جزئية من بينهم مكونة من عنصرين، إذن لدينا  $\binom{14}{2}$  خياراً

ممكناً. هناك إذن هناك

$$\binom{14}{2} \times \binom{15}{2} = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \cdot \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 9555$$

خياراً ممكناً.

## تَدْرِبْ صفحة 159

① انشر كلاً من العبارات الآتية:

$$(2x + 1)^6 \quad \textcircled{3} \quad (1 - x)^5 \quad \textcircled{2} \quad (2 + x)^4 \quad \textcircled{1}$$

$$(2 - i)^4 \quad \textcircled{6} \quad (1 + 2i)^3 \quad \textcircled{5} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \quad \textcircled{4}$$

**الحل**

$$(2 + x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4 \quad \textcircled{1}$$

$$(1 - x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \quad \textcircled{2}$$

$$(2x + 1)^6 = 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1 \quad \textcircled{3}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} \quad \textcircled{4}$$

$$(1 + 2i)^3 = -11 - 2i \quad \textcircled{5}$$

$$(2 - i)^4 = -7 - 24i \quad \textcircled{6}$$

② عيّن في منشور  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$  الحدّ الذي يحوي  $x^2$  والحدّ الثابت المستقل عن  $x$ .

**الحل**

الصيغة العامة للحد ذي الدليل  $r$  في منشور ذي الحدين هي  $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$  وفي حالتنا

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r} x^{10-2r}$$

فالحدّ الذي يحوي  $x^2$  هو الحد ذو الدليل  $r$  حيث  $10 - 2r = 2$  أي  $r = 4$ . وهذا الحدّ يساوي  $210x^2$ .

وبطريقة مماثلة نجد أنّ الحد الثابت هو الحد ذو الدليل  $r$  حيث  $10 - 2r = 0$  أي  $r = 5$ . وهذا الحدّ

يساوي 252.

③ ما الشرط على العدد الطبيعي  $n$  كي يحتوي منشور  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$  على حدّ ثابت مستقل عن  $x$ .

**الحل**

الصيغة العامة للحد ذي الدليل  $r$  في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{n}{r} x^{2(n-r)} \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{n}{r} x^{2n-3r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل  $r$  تحقق الشرط  $2n - 3r = 0$  فلا بدّ أن يكون  $n$

من مضاعفات العدد 3.

وبالعكس، إذا كان  $n$  من مضاعفات العدد 3 فإنّ  $r = \frac{2n}{3}$  تحقق الشرط المطلوب ويحتوي المنشور على

حدّ ثابت هو الحد ذي الدليل  $r = 2n/3$ .

④ اختزل منشور المقدار  $(1+x)^6 + (1-x)^6$ .

الحل

$$\begin{aligned}(1+x)^6 + (1-x)^6 &= 2 + 30x^2 + 30x^4 + 2x^6 \\ &= 2(1+x^2)(1+14x^2+x^4)\end{aligned}$$

## أنشطة

### نشاط 1 أنواع السحب المختلفة

نأمل صندوقاً يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 و 7 و 8 و 9.

#### 1 السحب مع الإعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي مع الإعادة**، أي إننا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرة.
  - نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.
- إذن نتيجة التجربة هي ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة  $E = \{6,7,8,9\}$ . فمثلاً الثلاثية (9,7,7) تمثل سحب الكرة التي تحمل الرقم 9 في السحب الأول والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثاني والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثالث.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية :

*a.* الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

*b.* الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

*c.* الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

*d.* الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

#### 2 السحب دون إعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي دون إعادة**، أي إننا لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرة.

- نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا أيضاً تكون نتيجة التجربة ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة  $E = \{6,7,8,9\}$ ، ولكن في هذه المرة يجب أن تكون بنود القائمة مختلفة مثلى مثلى. فهي إذن **ترتيب** لثلاثة عناصر مأخوذة من  $E$ .

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② أجب عن فقرات السؤال ② من الفقرة السابقة، ولكن لهذا النوع من التجارب.

### 3 السحب في آن معاً

نُجري التجربة الآتية:

▪ نسحب في آن معاً ثلاث كرات من الصندوق.

▪ نُدوّن أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا يمكن تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكوّنة من ثلاثة عناصر مأخوذة من  $E = \{6, 7, 8, 9\}$ .

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟

③ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدان 8 و 9 ؟

الجدل

① ①  $.4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

② a. 1    b. 4    c. 4    d.  $4^2 = 16$

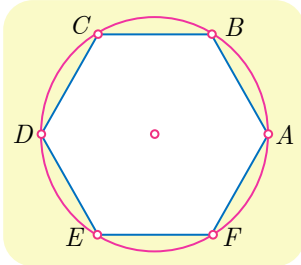
② ①  $.P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

② a. 1    b. 2    c. 2    d.  $3 \times 2 = 6$

③ ①  $. \binom{4}{3} = 4$     ②  $. \binom{3}{2} = 3$     ③  $. \binom{2}{1} = 2$

### نشاط 2 مثلثات في مسدّس

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$  موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.



نُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث.

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الجدل

① كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين

مثلثاً. إذن عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي  $\binom{6}{3} = 20$  مثلثاً.

② كل قطر في المسدّس هو وتر لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدّس عدا طرفيّ القطر

المختار ولدينا ثلاثة أقطار، فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها هو  $4 \times 3 = 12$ .

③ هناك مثلث واحدٍ منفرج الزاوية في  $A$  مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول

عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدّس أي 6.



### نشاط 3 منعاً من السرقة

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانوات يمكن لأي منها أن يأخذ أيّاً من القيم  $0, 1, \dots, 9$ .

① *a.* ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرّ إدخال أيّ خانة صحيحة في مكانها. ما عدد الرمّازات التي تُسبب انطلاق الإنذار.

*b.* ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل والمكوّنة من خانوات مختلفة مثني مثني؟

② عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرمز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع. يتذكر المالك أنّ الرمز الصحيح مكوّن من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها.

كم رمزاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكون من هذه الأرقام؟

#### الحل

① *a.*  $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$ . واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية وعددها 9999 فأبي منها يُطلق الإنذار.

① *b.*  $5040 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$ .

② هناك أربعة خيارات لموقع الرقم 1، وتبقى ثلاثة لموقع الرقم 5، وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 9 إذن هناك  $4 \times 3$  رمزاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكونه من هذه الأرقام.

### نشاط 4 تحويل العبارات المثلثية

#### ① ما هي المهمة المنشودة؟

نهدف إلى التعبير عن مقادير مثل  $\cos^n x$  أو  $\sin^n x$ ، أو حتى  $\cos^n x \sin^m x$  بصيغة مجموع حدود من الصيغة  $b \cos(qx)$  أو  $c \sin(qx)$  حيث  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $n$  و  $m$  و  $q$  أعداد طبيعية. فمثلاً رأينا في

دراستنا السابقة أن:  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$  و  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ .

تظهر أهمية هذه التحويلات خصوصاً عند حساب التوابع الأصلية، فإذا تمكّنا من كتابة التابع  $\cos^n x \sin^m x$  بصيغة عبارة خطية لتوابع من النمط  $x \mapsto \cos(qx)$  أو  $x \mapsto \sin(qx)$ ، صار بإمكاننا حساب تابع أصلي لهذا التابع.

#### ② شرح الطريقة في مثال

لنسع إلى تحويل عبارة  $\sin^4 x$  إلى مجموع حدود من الصيغة  $a \cos(qx)$ .

■ نستعمل علاقتي أويلر :  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  أو  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\sin^4 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

■ ثم ننشر  $(e^{ix} - e^{-ix})^4$  باستعمال **منشور ذي الحدين**:

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

■ نختزل هذه الصيغة باستعمال  $e^{ikx}e^{-ik'x} = e^{i(k-k')x}$  ثم نجمّع كل حدّين  $e^{ipx}$  و  $e^{-ipx}$  معاً لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

■ نستعمل علاقتي أويلر بالشكل  $e^{ipx} + e^{-ipx} = 2 \cos px$  أو  $e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i \sin px$  لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

■ فمثلاً لحساب  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$  نكتب

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \left[ \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}$$

(تتطلب هذا الفقرة دراية ببحث التكامل).

### 3 تطبيق

حوّل كلّ عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات  $x$  :

①  $\cos^4 x$     ②  $\cos^2 x \sin^2 x$     ③  $\sin^5 x$

البدل

$$\cos^4 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

①

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{-2ix} + e^{2ix}) + 6) = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$\cos^2 x \sin^2 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{16} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2$$

②

$$= -\frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\sin^5 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix}))$$

③

$$= \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$$

## مُشكلات ومساائل

1 أثبت صحة العلاقتين

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1} \quad \text{و} \quad \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

الحل

لدينا

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r! \cdot (n+1-r)!} \times \frac{r! \cdot (n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

وكذلك

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)! \cdot (n-r)!} \times \frac{r! \cdot (n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{r+1}$$

2 احسب قيمة كل من  $n$  و  $r$  إذا علمت:

$$2 \cdot \binom{n+1}{r+1} = 5 \cdot \binom{n+1}{r} \quad \text{و} \quad 3 \cdot \binom{n}{r} = 8 \cdot \binom{n}{r-1}$$

الحل

من  $3 \cdot \binom{n}{r} = 8 \cdot \binom{n}{r-1}$  نستنتج أنّ

$$\frac{8}{3} = \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \times \frac{(r-1)! \cdot (n-r+1)!}{n!} = \frac{n-r+1}{r}$$

$$\text{أو } 2 \cdot \binom{n+1}{r+1} = 5 \cdot \binom{n+1}{r} \quad \text{ومن } 3n + 3 = 11r$$

نستنتج أنّ

$$\frac{5}{2} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n+1}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)! \cdot (n-r)!} \times \frac{r! \cdot (n-r+1)!}{(n+1)!} = \frac{n-r+1}{r+1}$$

أو  $2n = 7r + 3$ . وبالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 11r - 3n = 3 \\ 7r - 2n = -3 \end{cases}$$

نجد  $(n, r) = (54, 15)$ .

3

عَيِّن  $n$  في كل من الحالات الآتية:

$$P_n^5 = 18P_{n-2}^4 \quad \textcircled{2} \quad P_{n+2}^4 = 14P_n^3 \quad \textcircled{1}$$

$$P_n^6 = 12P_{n-1}^5 \quad \textcircled{4} \quad P_n^4 = 10P_{n-1}^3 \quad \textcircled{3}$$

$$P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1 \quad \textcircled{6} \quad P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2 \quad \textcircled{5}$$

$$P_n^2 = 5P_{n-1}^1 \quad \textcircled{8} \quad P_{n+2}^3 = 4P_{n+1}^2 \quad \textcircled{7}$$

الجدل

① إذا كان  $n$  حلاً للمعادلة  $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$  كان  $(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$  ومنه  $n(n-1)(n-5)(n-6) = 0$  القيمتان  $n=0$  و  $n=1$  مرفوضتان لأن  $P_n^3$  معرّف فقط في حالة  $n \geq 3$ . ونتحقّق بسهولة أنّ  $n=5$  و  $n=6$  هما حلان للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي  $\{5,6\}$ .

② إذا كان  $n$  حلاً للمعادلة  $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$  كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

ومنه  $(n-2)(n-3)(n-4)(n-9)(n-10) = 0$  القيم  $\{2,3,4\}$  مرفوضة لأن  $P_n^5$  معرّف فقط في حالة  $n \geq 5$ . ونتحقّق بسهولة أنّ  $n=9$  و  $n=10$  هما حلاً للمعادلة المعطاة.

③ إذا كان  $n$  حلاً للمعادلة  $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$  كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$$

ومنه  $(n-1)(n-2)(n-3)(n-10) = 0$  القيم  $\{1,2,3\}$  مرفوضة لأن  $P_n^4$  معرّف فقط في حالة  $n \geq 4$ . ونتحقّق بسهولة أنّ  $n=10$  هو حل للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي  $\{10\}$ .

④ إذا كان  $n$  حلاً للمعادلة  $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$  كان  $n \geq 6$  عندها

$$12 = \frac{P_n^6}{P_{n-1}^5} = \frac{n!}{(n-6)!} \times \frac{(n-6)!}{(n-1)!} = n$$

إذن مجموعة الحلول هي  $\{12\}$ .

⑤ إذا كان  $n$  حلاً للمعادلة  $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$  كان  $n \geq 2$  وتكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي

$$2 = \frac{P_{n+1}^3}{P_{n+2}^2} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \times \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n(n-1)}{n+2}$$

ومنه  $(n-4)(n+1) = 0$ . إذن مجموعة الحلول هي  $\{4\}$ .

⑥ الجواب  $n = 2$ .

⑦ الجواب  $n = 2$ .

⑧ الجواب  $n = 5$ .

4 يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط ، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة إلى حالة  $n$  صديقاً.

الحل

كلما التقى شخصان تصافحا مرة واحدة، إذن عدد المصافحات يساوي عد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين. لدينا عشرة أشخاص فعدد المصافحات يساوي  $\binom{10}{2} = 45$ . وبوجه عام، في حالة حفل يضم  $n$  شخصاً يكون عدد المصافحات  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

5 في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.

- ① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟
- ② بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

الحل

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120 \quad \text{①}$$

$$\binom{6}{3} = 20 \quad \text{②}$$

6 أراد صف فيه إثنا عشر طالباً وثمانين طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص.

بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها في كل من الحالات الآتية:

- ① اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.
- ② في اللجنة طالبتان على الأكثر.
- ③ في اللجنة طالبتان على الأقل.

الحل

$$\binom{12}{3} \binom{8}{2} = 6160 \quad \text{①}$$

② عدد اللجان التي تحوي  $k$  طالبة حيث  $0 \leq k \leq 5$  يساوي  $\binom{12}{5-k} \binom{8}{k}$ ، إذن عدد اللجان التي تضم

طالبتين على الأكثر يساوي

$$\binom{12}{5-0} \binom{8}{0} + \binom{12}{5-1} \binom{8}{1} + \binom{12}{5-2} \binom{8}{2} = 10912$$

③ عدد اللجان التي تضم طالبتين على الأقل يساوي

$$\binom{12}{5-5} \binom{8}{5} + \binom{12}{5-4} \binom{8}{4} + \binom{12}{5-3} \binom{8}{3} + \binom{12}{5-2} \binom{8}{2} = 10752$$

7 احسب أمثال  $x^3$  في منشور  $(2 + 3x)^{15}$ .

الحل

الحد ذو الدليل  $r$  في هذا المنشور هو :  $T_r = \binom{15}{r} 2^{15-r} (3x)^r = \binom{15}{r} 2^{15-r} 3^r x^r$  إذن أمثال  $x^3$  هي  
 $\binom{15}{3} 2^{12} 3^3 = 2^{12} \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 13 = 50\,319\,360$ .

8 ما آحاد وعشرات العدد  $11^{11}$  ؟

الحل

الحد ذو الدليل  $r$  في منشور  $11^{11} = (1 + 10)^{11}$  هو :  $T_r = \binom{11}{r} 1^{11-r} (10)^r = \binom{11}{r} (10)^r$  إذن جميع الحدود  $T_2, T_3, \dots, T_{11}$  هي من مضاعفات المئة وإضافتها لا تؤثر في آحاد وعشرات العدد  $T_0 + T_1 = 111$ . إذن كل من آحاد وعشرات العدد  $11^{11}$  يساوي 1.

9 ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول  $x$ ) في منشور  $(x + \frac{1}{x^3})^{12}$  ؟

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل  $r$  في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{12}{r} x^{12-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-4r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل  $r$  تحقق الشرط  $12 - 4r = 0$  فلا بد أن يكون  $r = 3$  والحد المطلوب هو  $T_3 = 220$ .



## لنتعلم البحث معاً

### 10 عدد أقطار مضلع محدب

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه  $n$  حيث  $n \geq 4$ ، يعطى بالعلاقة  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

#### نحو الحل

نعلم أن القطر في المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين. فكم قطعة مستقيمة تصل بين رأسين مختلفين من رؤوس المضلع يمكن أن نرسم؟ ومن بين هذه القطع كم ضلعاً للمضلع تجد؟

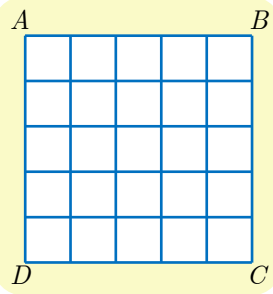
اشرح لماذا يمثل المقدار  $n - \binom{n}{2}$  عدد الأقطار المطلوب.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



لتكن  $V$  مجموعة رؤوس المضلع وعدد عناصرها  $n$ . أيّة مجموعة جزئية مكوّنة من عنصرين من  $V$  تعرّف إما قطراً في المضلع أو ضلعاً فيه. إذن  $\binom{n}{2}$  يساوي عدد الأقطار المطلوب مضافاً إليه عدد الأضلاع وهو  $n$ . نستنتج أنّ عدد الأقطار يساوي  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

### 11 التعداد على شبكة



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع  $ABCD$ . ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل. علماً أن المربع مستطيل خاص.

#### نحو الحل

غالباً ما يكون مفيداً، عند حلّ مسائل التعداد، إيجاد أسلوب عملي يتيح الحصول على الأشياء التي نريد تعدادها، وهذا واحد من هذه الأساليب: تحقق أنه عندما يتقاطع مستقيمان شاقوليان مع مستقيمين أفقيين نحصل على مستطيل.

يجب أن نتيقّن من تعداد جميع الأشياء المطلوبة دون استثناء ودون تكرار. لنرمز إذن إلى المستقيمت الشاقولية  $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  بحيث ينطبق  $(AD)$  على  $v_0$  و  $(BC)$  على  $v_5$ . ولنرمز أيضاً إلى المستقيمت الأفقية  $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$  بحيث ينطبق  $(AB)$  على  $h_0$  و  $(DC)$  على  $h_5$ . وعلى هذا يمكن تمثيل كل مستطيل بالشكل  $(\{h_i, h_j\}, \{v_k, v_l\})$  مع  $(i \neq j \text{ و } k \neq l)$ . لاحظ أنّ الترتيب غير مهم أي إنّ المستطيل الموافق لـ  $(\{h_i, h_j\}, \{v_k, v_l\})$  هو نفسه المستطيل الموافق

لـ  $(\{h_j, h_i\}, \{v_\ell, v_k\})$  أو  $(\{h_j, h_i\}, \{v_\ell, v_k\}) \dots$  . استنتج أن عدد المستطيلات المنشود يساوي عدد أساليب اختيار مستقيمين شاقوليين، ومستقيمين أفقيين.

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.



عملاً بالمناقشة الموضّحة في نصّ الحلّ نجد أنّ عدد المستطيلات المطلوب يساوي  $(\binom{6}{2})^2 = 225$ .

من خواص عدد التوافيق

12

في حالة عدد طبيعي  $n$  . ادرس كيف تتغير الحدود المتتالية  $\left(\binom{n}{r}\right)_{0 \leq r \leq n}$ ، واستنتج أنّ المساواة  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$  تكافئ  $p = q$  أو  $p + q = n$ .

نحو الحلّ

لننظر إلى الحدود المتتالية  $\left(\binom{n}{r}\right)_{0 \leq r \leq n}$  عند بعض القيم الصغيرة للعدد  $n$  . في حالة  $n = 4$  نجد  $(1, 4, 6, 4, 1)$  وفي حالة  $n = 5$  نجد  $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$  . في الحالتين: تتزايد الحدود في البداية ثم تتناقص.

لمقارنة حدّين متتاليين نحسب نسبتهم ونقارن هذه النسبة مع الواحد.

$$\textcircled{1} \text{ أثبت أنّ } \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n-r}{r+1}$$

$\textcircled{2} a$  . نفترض أنّ  $n = 2m$  . أثبت أنّ

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \text{ في حالة } m > r \text{ و } \binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \text{ في حالة } m \leq r$$

$$\text{استنتج أنّ } \binom{2m}{m} \text{ هو أكبر أعداد التوافيق } \left(\binom{2m}{r}\right)_{0 \leq r \leq 2m}$$

$b$  . نفترض أنّ  $n = 2m + 1$  . أثبت أنّ

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \text{ في حالة } m > r \text{ و } \binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \text{ في حالة } m < r$$

$$\text{استنتج أنّ } \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} \text{ هما أكبر أعداد التوافيق } \left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0 \leq r \leq 2m+1}$$

لاحظ أنّ المساواة  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$  تقتضي أن يكون  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-p} = \binom{n}{n-q}$ ، وأنّه في

هذه الحالة يكون اثنان من الأعداد  $p, q, n-p, n-q$  أصغر من  $\frac{n}{2}$  أو يساويانه. ويكونان من ثمّ

متساويين استناداً إلى الفقرة السابقة.





$$\textcircled{1} \quad \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n!}{(r+1)! \cdot (n-r-1)!} \times \frac{r! \cdot (n-r)!}{n!} = \frac{n-r}{r+1} \quad \text{نلاحظ أنّ:}$$

② a. في حالة  $n = 2m$  لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow 2m-r < r+1 \Leftrightarrow 2m < 2r+1 \Leftrightarrow m \leq r$$

ونجد بالمثل أنّ  $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$  يكافئ  $m > r$ . إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

$r$	0	$m$	$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\binom{2m}{m}$	1

وهذا يبرهن أنّ  $\binom{2m}{m}$  هو أكبر أعداد التوافق  $\cdot \left( \binom{2m}{r} \right)_{0 \leq r \leq 2m}$

② b. في حالة  $n = 2m + 1$  لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow 2m < 2r \Leftrightarrow m < r$$

ونجد بالمثل أنّ  $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$  يكافئ  $m > r$ . إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

$r$	0	$m$	$m+1$	$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	1

ولكن

وهذا يبرهن أنّ  $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$  هو أكبر أعداد التوافق  $\cdot \left( \binom{2m+1}{r} \right)_{0 \leq r \leq 2m}$

**نتيجة مهمة.** نستنتج مما سبق أنّ  $\left( \binom{n}{r} \right)_{0 \leq r \leq n/2}$  متزايدة تماماً فإذا وقعت المساواة  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$  وكان

$p$  و  $q$  أصغر من  $n/2$  استنتجنا أنّ  $p = q$ . وإذا كان أحدهما أكبر من  $n/2$  (وليكن  $q$ ) أكبر تماماً من  $n/2$  والآخر أصغر منه استنتجنا من  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q}$  أنّ  $p = n - q$ ، أمّا إذا كان كلا العددين  $p$  و  $q$  أكبر من  $n/2$  استنتجنا من  $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{n-q}$  أنّ  $n - p = n - q$ ، أو  $p = q$ . والخلاصة المساواة  $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$  تقتضي أنّ  $p = q$  أو  $p + q = n$ .

## قُدماً إلى الأمام

**13** ليكن كثير الحدود  $F(x) = (1 + ax)^5(1 + bx)^4$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين، فإذا علمت أن أمثال  $x$  تساوي 62، فما هي القيم الممكنة للمجموع  $a + b$  ؟

الحل

**ملاحظة مهمة.** في حالة أي كثير الحدود  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  أمثال  $x$  هي  $P'(0)$ . في حالتنا، نجد بحساب بسيط أن  $F'(0) = 5a + 4b$ . إذن لدينا بحسب الفرض  $5a + 4b = 62$  ولكن  $a$  و  $b$  موجبان إذن  $4(a + b) \leq 5a + 4b \leq 5(a + b)$  وهذا يكافئ  $\frac{62}{5} \leq a + b \leq \frac{62}{4}$  أو

$$12.4 \leq a + b \leq 15.5$$

ولكن  $a + b$  عددٌ طبيعي فرضاً إذن  $a + b \in \{13, 14, 15\}$ ، وتبين الأمثلة

$$(a, b) = (2, 13) \text{ و } (a, b) = (6, 8) \text{ و } (a, b) = (10, 3)$$

أن قيم في المجموعة  $\{13, 14, 15\}$  هي حالات ممكنة للمجموع  $a + b$ .

**14** يريد معلّم توزيع  $n + 1$  جائزة مختلفة على  $n$  تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل

يزيد عدد الجوائز على عدد التلاميذ بمقدار واحد. إذن هناك تلميذ واحد فقط سينال جائزتين في حين ينال كل واحد من باقي التلاميذ جائزة واحدة فقط.

سنجري توزيع الجوائز في مرحلتين :

■ الأولى: اختيار الجائزتين اللتين ستوزعان معاً. وهذا يؤول إلى اختيار مجموعة مؤلفة من جائزتين من مجموعة جميع الجوائز التي عدد عناصرها  $n + 1$  ولدينا  $\binom{n+1}{2}$  خياراً متاحاً.

■ الثانية: ننظر إلى الجائزتين المختارتين بصفتهما جائزة واحدة، ثم نوزع الجوائز التي أصبح عددها  $n$  جائزة على التلاميذ لكل واحد منهم جائزة. وبالطبع عدد الخيارات الممكنة  $P_n^n = n!$ .

نستنتج، استناداً إلى المبدأ الأساسي في العد أن العدد الكلي للنتائج المختلفة لعملية توزيع الجوائز هذه هو

$$\binom{n+1}{2} \cdot n! = \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$$

لنكن المجموعة  $S = \{1,2,3,4,5\}$  ولدينا مجموعة  $H$  من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية:  
أرقامها مختلفة ومأخوذة من  $S$ ، لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5، كل عدد منها أكبر من 20000. فما هو عدد عناصر  $H$  ؟

## الجل

- عدد خانات أي عدد من  $H$  أصغر أو يساوي 5 لأنه إذا كان يُكتب بست خانات أو أكثر لوجب أن يكون في كتابته رقمان متماثلان وهذا يناقض التعريف.
- عدد خانات أي عدد من  $H$  يساوي 5 لأنه إذا كان العدد يكتب بأربع خانات أو أقل لكان هذا العدد أصغر من 9999 وهذا أيضاً يناقض تعريف  $H$ .
- نستنتج إذن أن  $H$  هي مجموعة الأعداد من الشكل  $abcde$  حيث  $(a,b,c,d,e)$  هو تبديل على المجموعة  $S = \{1,2,3,4,5\}$  (لأن الأرقام مختلفة) وتحقق الشرطين  $e \neq 5$  (لأن العدد ليس من مضاعفات 5) و  $a \geq 2$  (لأن العدد أكبر من 20000).
- فإذا عرفنا  $\Omega$  مجموعة الأعداد من الشكل  $abcde$  حيث  $(a,b,c,d,e)$  هو تبديل على المجموعة  $S = \{1,2,3,4,5\}$  وعددها يساوي  $5! = 120$ ، لوجدنا أنه من الأسهل التعامل مع متممة  $H$  أي  $H' = \Omega \setminus H$ .
- ينتمي العدد  $x$  إلى  $H'$  في حالتين: إما أن يبدأ بالعدد 5 أو أن ينتهي بالعدد 1. فإذا رمزنا بالرمز  $A$  إلى مجموعة أعداد  $\Omega$  من الشكل  $abcd5$  حيث  $(a,b,c,d)$  هو تبديل على المجموعة  $\{1,2,3,4\}$ ، وبالرمز  $B$  إلى مجموعة أعداد  $\Omega$  من الشكل  $1bcde$  حيث  $(b,c,d,e)$  هو تبديل على المجموعة  $\{2,3,4,5\}$ ، كان  $H' = A \cup B$  ومن ثم

$$n(H') = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 + 24 - 6 = 42$$

إذن  $n(H) = 120 - 42 = 78$  وهو عدد عناصر  $H$ .

صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء و كرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

- ① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
- ② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟
- ③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟
- ④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
- ⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

هنا نفترض أن الكرات متمايزة (مرقمة مثلاً).

- ① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي  $10 \times 10 \times 10 = 1000$ .
- ② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر  $6 \times 6 \times 4 \times 3 = 432$
- عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض  $3 \times 3 \times 7 \times 3 = 189$
- عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأسود  $1 \times 1 \times 9 \times 3 = 27$
- عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو  $432 + 189 + 27 = 648$
- ③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون  $6 \times 3 \times 1 \times 3! = 108$
- ④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي  $1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$
- ⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو سوداء فقط أي  $10^3 - (1 + 3)^3 = 936$
- ⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي جميع النتائج عدا النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو حمراء فقط أي  $10^3 - (6 + 3)^3 = 271$

17

صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء و كرة واحدة سوداء. نسحب من

الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

- ① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
- ② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟
- ③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟
- ④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
- ⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟
- ⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

- ① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي  $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
- ② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر  $(6 \times 5 \times 4) \times 3 = 360$
- عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض  $(3 \times 2 \times 7) \times 3 = 126$
- عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو  $360 + 126 = 486$

- ③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون هو  $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$ .
- ④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي  $720 - (P_6^3 + P_3^3) = 594$ .
- ⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي  $720 - (P_4^3) = 696$ .
- ⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي  $(1 \times 9 \times 8) \times 3 = 216$ .

**18** لتكن  $S = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ . كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من  $S$  مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل

لنجزئ المجموعة  $S$  إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 كما يأتي

$$A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

$$A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

$$A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$$

إذن باقي قسمة أي عنصر من عناصر  $A_k$  على 3 يساوي  $k$  حيث  $k = 0, 1, 2$ .

- لنتأمل مجموعة جزئية  $\{a, b, c\}$  مكونة من ثلاثة عناصر  $S$  وبحيث يكون  $a + b + c$  مضاعفاً للعدد 3.
- إذا انتمى عنصران من عناصر  $\{a, b, c\}$  إلى المجموعة  $A_k$  نفسها وجب أن ينتمي الثالث إلى ذات المجموعة. (مثلاً إذا كان  $a$  و  $b$  من  $A_1$  وجب أن ينتمي  $c$  إلى  $A_1$ ، لأنّ مجموع بواقي القسمة يجب أن يساوي 3 في هذه الحالة، وهكذا... ) إذن تصبح  $\{a, b, c\}$  مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر من إحدى المجموعات  $A_0$  أو  $A_1$  أو  $A_2$ . وعدد مثل هذه المجموعات يساوي  $(\binom{10}{3}) \times 3 = 360$ .
  - إذا لم ينتم أي اثنين من عناصر المجموعة  $\{a, b, c\}$  إلى المجموعة  $A_k$  نفسها، في هذه الحالة يكون الشرط: " $a + b + c$  مضاعفاً للعدد 3" محققاً حكماً لأنّ بواقي قسمة عناصر  $\{a, b, c\}$  على 3 هي 0 و 1 و 2، ومجموعها يساوي 3. إذن عدد مثل هذا النوع من المجموعات  $\{a, b, c\}$  يساوي  $10 \times 10 \times 10$  أي 1000.
- وعليه، عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من  $S$  مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي  $1000 + 360 = 1360$  مجموعة.

**19** ليكن العدد المعرّف بالصيغة:  $A_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ .

- ① تحقّق أنّ  $A_3$  و  $A_4$  هما عدداً طبيعيين.
- ② أثبت أنّ  $A_n$  عددٌ طبيعي أيّاً كانت قيمة العدد الطبيعي  $n$ .

① تسهياً للحسابات ضع  $a = 2 + \sqrt{3}$  و  $b = 2 - \sqrt{3}$  ولاحظ أنّ  $a + b = 4$  و  $ab = 1$  . ومنه نجد

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 16 - 2 = 14$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 4(14 - 1) = 52$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = 196 - 2 = 194$$

إذن

$n$	0	1	2	3	4
$A_n$	2	4	14	52	194

② لنرمز  $T_r$  إلى الحدّ ذي الدليل  $r$  في منشور ذي الحدين للمقدار  $(2 + \sqrt{3})^n$  فنجد أنّ

$$T_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r$$

ولنرمز بالمثل  $T'_r$  إلى الحدّ ذي الدليل  $r$  في منشور ذي الحدين للمقدار  $(2 - \sqrt{3})^n$  فنجد أنّ

$$T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (-\sqrt{3})^r$$

نلاحظ إذن أنّ

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r + \binom{n}{r} 2^{n-r} (-\sqrt{3})^r = (1 + (-1)^r) \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r$$

▪ فإذا كان  $r$  عدداً زوجياً أي  $r = 2k$  كان  $T_r + T'_r = 2 \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k$  وهذا عدد طبيعي،

▪ وإذا كان  $r$  عدداً فردياً أي  $r = 2k + 1$  كان  $1 + (-1)^r = 0$  ومن ثمّ  $T_r + T'_r = 0$  وهذا عدد

طبيعي أيضاً.

ولكنّ  $A_n$  يساوي مجموع جميع هذه الحدود، ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها عدداً طبيعياً أي  $A_n \in \mathbb{N}$ .

## 20

نتأمل مضلعاً محدّباً مؤلفاً من  $n$  ضلعاً ( $n > 4$ ). نسمي **قطراً** في المضلع كل قطعة مستقيمة

تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع. نفترض أننا في الحالة العامّة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة

أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة أحد رؤوس المضلع. احسب  $D_n$  عدد نقاط تقاطع

أقطار المضلع بدلالة  $n$ . يمكن البدء بتعيين  $D_4$  و  $D_5$ .

مساعدة: الجواب  $n + \binom{n}{4}$ .

▪ يتقاطع قطراً أي رباعي محدّب في نقطة واحدة داخله، إذن  $D_4 = 1$ ، الفكرة المهمّة هنا هي أنّ كل أربع نقاط تمثل رؤوس رباعي يوافقها نقطة تقاطع واحدة لقطري هذا الرباعي.

▪ في حالة مضلع خماسي نجد أنّ الرؤوس هي أيضاً نقاط تقاطع للأقطار إذ ينبثق من كل رأس قطران للمضلع، ويضاف إلى ذلك نقاط التقاطع الواقعة داخل المضلع، وهنا يوافق كل أربعة رؤوس قطرين

متقاطعين في نقطة تقاطع واحدة إذن  $D_5 = 5 + 5 = 10$ .

■ في الحالة العامّة. عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي تلك التي تحددها الرباعيّات التي رؤوسها من رؤوس المضلع وعددها  $\binom{n}{4}$ ، ويضاف إليها في حالة  $n \geq 5$  رؤوس المضلع إذ ينبثق من كل رأس أكثر من قطر للمضلع وعدد هذه الرؤوس  $n$ . فالعدد الكلي لنقاط تقاطع الأقطار في حالة  $n \geq 5$  يساوي  $\binom{n}{4} + n$ .

**21** اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية  $x$ ، ثم أجب عن السؤال الموافق.

①  $\cos^3 x$ ، واستنتج قيمة  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ .

②  $\sin^3 x$ ، واستنتج قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x}$ .

③  $\sin^4 x$ ، واستنتج قيمة  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$ .

④  $\cos x \sin^4 x$ ، واحسب  $F(x) = \int_0^x \cos t \sin^4 t dt$  بطريقتين.

الحل

① بتطبيق دستور أولير  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  ثم منشور ذي الحدين نجد

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x) \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \right) dx = \left[ \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

② بتطبيق دستور أولير  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  ثم منشور ذي الحدين نجد

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= -\frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x) \end{aligned}$$

ومنه

$$\frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x} = -\frac{4 \sin^3 x}{\tan^3 x} = -4 \cos^3 x$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x} = -4$

③ بمثل ما سبق نجد

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4 \times \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

④ بتطبيق دستوري أويلر  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  و  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  نجد

$$\begin{aligned}\cos x \sin^4 x &= \frac{1}{32} (e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{32} (e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ &= \frac{1}{32} (e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{16} \left( \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 2 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} (\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x)\end{aligned}$$

ومنه :  $F(x) = \frac{1}{80} \sin 5x - \frac{1}{16} \sin 3x + \frac{1}{8} \sin x$

ولكن من الواضح أنّ  $F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x$  . فنكون قد أثبتنا صحة المساواة:

$$\sin^5 x = \frac{1}{16} \sin 5x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x$$



# 7

## الاحتمالات

- 1 الاحتمالات المشروطة (تذكرة)
- 2 المتحولات العشوائية
- 3 الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين
- 4 المتحولات العشوائية المحدانية

## نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة:

- استعمال المخطط الشجري عند دراسة تجارب احتمالية مركّبة.
- قانون متحول عشوائيّ يأخذ عدداً منتهياً من القيم وحساب توقعه وتباينه.
- قانون زوج من المتحولات العشوائية التي يأخذ كل منها عدداً منتهياً من القيم، واستقلالهما الاحتمالي.
- التجارب البرنوليّة، والمتحولات العشوائية الحدانية.

## تَدْرِبْ صفحة 180

① يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها ببيضاوات اللون. نسحب منه ثلاث كرات دفعة واحدة. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة ببيضاوات؟

**الحل**

ليكن  $A$  الحدث "الكرات المسحوبة الثلاث ببيضاوات" عندئذ عدد النتائج المؤاتية لهذا الحدث يساوي  $n(A) = \binom{7}{3}$  وحجم فضاء العينة يساوي  $n(\Omega) = \binom{20}{3}$  إذن

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n(\Omega)} = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{35}{1140} = \frac{7}{228}$$

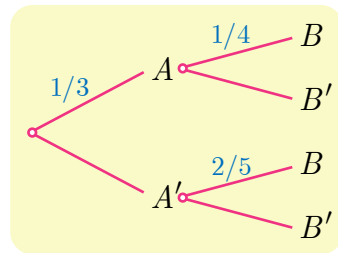
② نملاً عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية     بأحد العددين +1 أو -1 احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً للصفر. وكذلك احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتي متجاورتين.

**الحل**

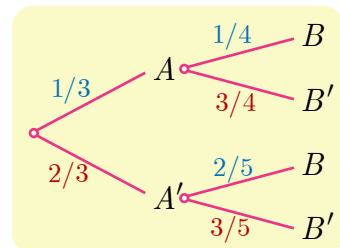
عدد الخانات 4 إذن عدد عناصر فضاء العينة  $n(\Omega) = 2^4 = 16$ . لنرمز  $A$  إلى الحدث "مجموع الخانات يساوي الصفر". عندئذ النتائج المؤاتية هي تلك التي تحتوي على إشارتين موجبتين والباقية سالبة. إذن عدد النتائج المؤاتية يساوي  $n(A) = \binom{4}{2} = 6$  واحتمال الحدث  $A$  يساوي  $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ .

لنرمز  $B$  الحدث "لا يظهر العدد ذاته في خانتي متجاورتين" عندئذ تكون النتائج المؤاتية  $\{+-+-, -+-+\}$  وعددها 2 إذن  $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$ .

③ استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور. عيّن الاحتمالات  $\mathbb{P}(A')$  و  $\mathbb{P}(B'|A)$  و  $\mathbb{P}(B'|A')$  واستنتج قيمة كل من  $\mathbb{P}(A \cap B)$  و  $\mathbb{P}(A \cap B')$  و  $\mathbb{P}(A' \cap B)$  و  $\mathbb{P}(A' \cap B')$



**الحل**



نتمّ المخطط الشجري فنجد الشكل المجاور، ونقرأ منه:

$$\mathbb{P}(A') = \frac{2}{3} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A) = \frac{3}{4} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A') = \frac{3}{5}$$

وعليه نحسب

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, & \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \mathbb{P}(A' \cap B') &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, & \mathbb{P}(A' \cap B) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

④ أجب عن الأسئلة الآتية:

■ إذا كان  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$  و  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$  و  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$  فاحسب  $\mathbb{P}(A|B)$  و  $\mathbb{P}(B|A)$ .

الحل

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

■ إذا كان  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$  و  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$  و  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$  فاحسب  $\mathbb{P}(A|B)$  و  $\mathbb{P}(B|A)$ .

الحل

نعلم أن  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$  وبالتعويض نجد  $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \mathbb{P}(A \cap B)$  ومنه  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$  وبالتالي

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

■ إذا كان  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$  و  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{4}$  و  $\mathbb{P}(B|A') = \frac{4}{5}$  فاحسب  $\mathbb{P}(B)$ .

الحل

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A') \\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A') \cdot \mathbb{P}(B|A') \\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + (1 - \mathbb{P}(A)) \cdot \mathbb{P}(B|A') \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{37}{60} \end{aligned}$$

■ إذا كان  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$  و  $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$  و  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}$  فاحسب  $\mathbb{P}(A|B)$  و  $\mathbb{P}(B|A)$ .

واحسب أيضاً  $\mathbb{P}(A' \cap B')$  واستنتج  $\mathbb{P}(B'|A')$ .

الحل

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\mathbb{P}(A' \cap B') = \mathbb{P}((A \cup B)') = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$$

$$= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{20}$$

$$\mathbb{P}(B'|A') = \frac{\mathbb{P}(A' \cap B')}{\mathbb{P}(A')} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$$

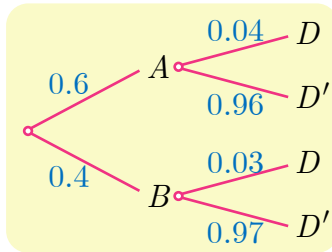
⑤ يضمّ مصنع ورشتين  $A$  و  $B$  لتصنيع المصابيح الكهربائية. عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح، صنّعت الورشة  $A$  منها 1200 مصباحاً وصنّعت البقية الورشة  $B$ . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة  $A$  معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة  $B$  معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب. نرمز بالرمز  $A$  إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة  $A$ » وبالرمز  $B$  إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة  $B$ » وبالرمز  $D$  إلى الحدث «المصباح معطوب».

① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

③ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة  $A$ .

### الحل



① التمثيل الشجري للتجربة.

② احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

$$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.03 = 0.036$$

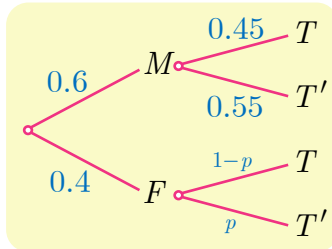
③ إذا كان المصباح معطوباً فإن احتمال أن يكون مصنوعاً في

الورشة  $A$  هو

$$\mathbb{P}(A | D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.6 \times 0.04}{0.036} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

⑥ في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب. ونعلم أنّ مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأنّ 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب. ما احتمال أن تكون طالبة مُختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب؟

### الحل



المطلوب هو احتمال ألا يكون الشخص المختار ممن يلعبون كرة المضرب علماً أنه أنثى. أي  $\mathbb{P}(T'|F)$ . أمّا المعطيات  $\mathbb{P}(M) = 0.6$  و  $\mathbb{P}(T) = 0.3$  و  $\mathbb{P}(T'|M) = 0.55$  من التمثيل الشجري المجاور نستنتج أنّ

$$. p = 0.925 \text{ بالحل نجد } 0.4(1 - p) + 0.60 \cdot 0.45 = 0.3$$

## تَدْرِبْ صفحة 184

① نلقي حجر نرد متوازن وجوهره مرقمة من 1 إلى 6. نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6، ونخسر درجتين في بقية الحالات. ليكن  $X$  المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$ ، واحسب كلاً من  $\mathbb{E}(X)$  و  $\mathbb{V}(X)$ .

الجل

مجموعة النتائج الممكنة هي  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، وهذه النتائج متساوية في الاحتمال لأن النرد متوازن. المتحول العشوائي  $X$  معرف على  $\Omega$  ويأخذ قيمه في  $\{-2, 1, 6\}$  كما إن

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 6) &= \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X = -2) &= \mathbb{P}(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{6}\end{aligned}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

$x$	1	-2	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{4}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} \\ \mathbb{E}(X^2) &= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{4}{6} + 36 \times \frac{1}{6} = \frac{53}{6} \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}\end{aligned}$$

② يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمي  $X$  المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عيّن مجموعة قيم  $X$ ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الجل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي  $X$  هي  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} \text{ و } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} \text{ و } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

$x$	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

③ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التوالي وبدون إعادة.

الجل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي  $X$  هي  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$  ولدينا

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{P_2^1 \cdot P_3^1 \cdot 2}{P_5^2} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

وعليه نرى أن هذه التجربة مطابقة للتجربة السابقة وقانون  $X$  هو نفسه القانون السابق.

④ يحتوي صندوق على خمس كرات: اثنتان تحملان الرقم 1 واثنان تحملان الرقم 2 وواحدة

تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمي  $X$  المتحول

العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عيّن مجموعة

قيم  $X$ ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الجل

مجموعة قيم  $X$  هي  $\{2, 3, 4, 5\}$ ، وقانونه الاحتمالي

$x$	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{4}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = 4 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{4}{10} + 16 \times \frac{3}{10} + 25 \times \frac{2}{10} - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

⑤ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة.

الحل

الحل مطابق للتمرين السابق. الهدف هو الوصول إلى فكرة أن السحب معاً يماثل السحب على التتالي دون إعادة.

⑥ نُلقِ حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين. ليكن  $X$  المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$  واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{36}(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1) = 7$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{1}{36}(4 \times 1 + 9 \times 2 + 16 \times 3 + 25 \times 4 + 36 \times 5 + 49 \times 6 + 64 \times 5 + 81 \times 4 + 100 \times 3 + 121 \times 2 + 144 \times 1) - 7^2 \\ &= \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.42 \end{aligned}$$

## تَدْرِبْ صَفحة 187



$X \backslash Y$	0	1	2	قانون $X$
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون $Y$				

① نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج  $(X, Y)$  من المتحولات العشوائية، أكمله وبيّن إذا كان المتحولان العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلين احتمالياً.

الحل

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= \frac{1}{20} \\ \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

إذن  $X$  و  $Y$  غير مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون $X$
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون $Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	



$X \backslash Y$	0	1	2	قانون $X$
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون $Y$	0.3			

② أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية  $(X, Y)$ ، علماً أنّ المتحولين العشوائيين  $X$  و  $Y$  مستقلان احتمالياً.

الجل

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون $X$
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون $Y$	0.3	0.5	0.2	

③ نُلقِ حجري نرد متوازنين. ليكن  $X$  المتحوّل العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، وليكن  $Y$  المتحوّل العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج  $(X, Y)$ ، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من  $X$  و  $Y$ ، واحسب توقع وتباين كل من  $X$  و  $Y$ . أياً كان  $X$  و  $Y$  مستقلين احتمالياً؟

الجل

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	قانون $Y$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون $X$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

ونلاحظ أنّ

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 3)$$

إذن  $X$  و  $Y$  غير مستقلين احتمالياً. ونترك أمر حساب توقع وتباين كل من  $X$  و  $Y$  البسيط للقارئ.

## تَدْرِبْ صَفِيحَة 192

① يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

① نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي ومع الإعادة. ونعرّف  $X$  المتحول العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$ .

### الجل

① ثلاثة أرباع عدد كرات الصندوق حمراء اللون إذن إذا كان  $R$  حدث سحب كرة حمراء اللون

$$\text{كان } \mathbb{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

② هذه تجربة برنولية،  $X$  يحصي عدد مرات الحصول على كرة حمراء عند تكرار التجربة

ثلاث مرات ( $n = 3$ ) علماً أنّ احتمال الحصول كرة حمراء في المرة الواحدة يساوي  $p = \frac{3}{4}$ .

إذن يتبع  $X$  قانوناً حدانياً  $\mathcal{B}(3, \frac{3}{4})$ .

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

$x$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

② نُلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات فقط ثلاث مرات؟

## الجل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن  $X$  عدد مرات الحصول على العدد 6 عند تكرار التجربة ست مرات  
 $(n = 6)$  علماً أنّ احتمال الحصول العدد 6 في المرة الواحدة يساوي  $p = \frac{1}{6}$ . قانون  $X$   
 حدّاني  $B(6, \frac{1}{6})$  والمطلوب حساب  $\mathbb{P}(X = 3)$  أي  $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$ .  
 ③ تُلقى حجر نرد متوازن ثمانين مرات متتالية. ليكن  $A$  الحدث: «الحصول على عدد زوجي  
 ثلاث مرات على الأقل». ما احتمال  $A$  ؟

## الجل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن  $X$  عدد مرات الحصول على عدد زوجي عند تكرار التجربة ثمانين  
 مرات  $(n = 8)$  علماً أنّ احتمال الحصول عدد زوجي في المرة الواحدة يساوي  $p = \frac{1}{2}$ . قانون  
 $X$  حدّاني  $B(8, \frac{1}{2})$  والمطلوب حساب  $\mathbb{P}(X \geq 3)$  أي  
 هذا يتطلب حساب مجموع ست حدود والأسهل حساب  $\mathbb{P}(X < 3)$  لأنّه يتضمن حساب مجموع  
 ثلاث حدود. فنكتب

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - (\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0)) \\ &= 1 - \left( \binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot q^6 + \binom{8}{1} \cdot p^1 \cdot q^7 + \binom{8}{0} \cdot p^0 \cdot q^8 \right) \\ &= 1 - \left( \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right) \\ &= 1 - \frac{28 + 8 + 1}{256} = \frac{219}{256} \end{aligned}$$

④ يتواجه لاعبان  $A$  و  $B$  في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار. يكسب  
 $A$  الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من  
 الأدوار. ما احتمال أن يربح  $B$  المباراة ؟

## الجل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن  $X$  عدد الأدوار التي يكسبها  $A$  بعد تسعة أدوار  $(n = 9)$  علماً أنّ  
 احتمال ربحه في الدور الواحد يساوي  $p = 0.6$ . قانون  $X$  حدّاني  $B(9, 0.6)$  والمطلوب حساب  
 $\mathbb{P}(X \leq 4)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= \binom{9}{0} 0.6^0 0.4^9 + \binom{9}{1} 0.6^1 0.4^8 + \binom{9}{2} 0.6^2 0.4^7 + \binom{9}{3} 0.6^3 0.4^6 + \binom{9}{4} 0.6^4 0.4^5 \\ &\approx 0.2666 \end{aligned}$$

## أنشطة

### نشاط 1 إنشاء واستعمال التمثيل الشجري

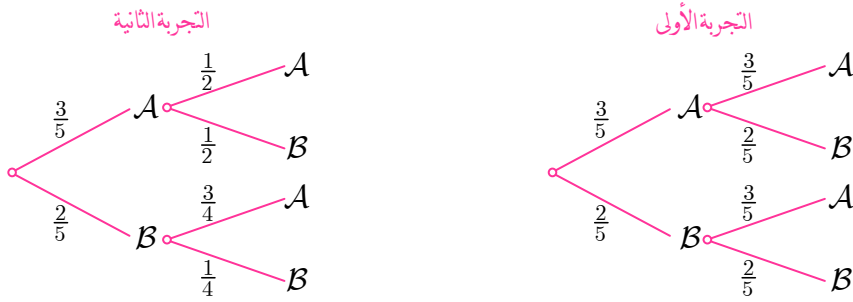
#### 1 السحب مع الإعادة وبدونها

يحتوي صندوق على ثلاثة حروف  $A$  وحرفين اثنين  $B$ .

التجربة الأولى. نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجل النتيجة ثم نُعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجل النتيجة.

التجربة الثانية. نسحب عشوائياً وعلى التوالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجل النتيجة بترتيب السحب.

اشرح التمثيلين الشجريين الآتيين:



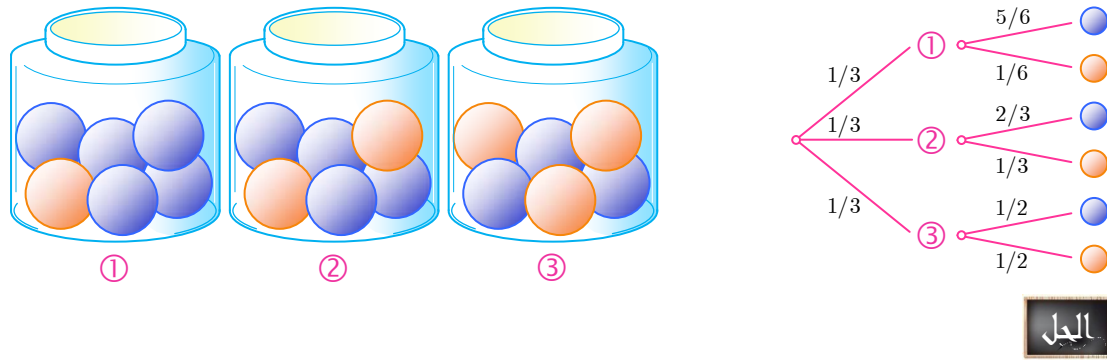
ما احتمال الحصول على  $AA$  في التجربة الأولى؟ وما احتمال هذا الحدث في التجربة الثانية؟

الجل

$$\mathbb{P}(AA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \text{ : التجربة الأولى ، } \mathbb{P}(AA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \text{ : التجربة الثانية}$$

#### 2 سحب صندوق ثم سحب كرة

تتألف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل، ثم نختار منه كرة. ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة. اشرح هذا الإنشاء ثم أعط احتمال الحدث: «سحب كرة زرقاء اللون». وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ②؟



الحل

ليكن  $B$  حدث سحب كرة زرقاء عندئذ فإن  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

وليكن  $A$  حدث سحب كرة من الصندوق ② عندئذ يكون المطلوب

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

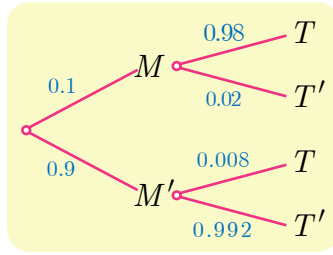
## نشاط 2 فحص الأمراض

يُصيبُ مرضٌ نسبة 10% من السكان. يُتيح اختبارٌ اكتشاف إذا كان شخصٌ مصاباً بهذا المرض. يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008. أمّا احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02.

لنرمز بالرمز  $M$  إلى الحدث «الشخص مصاب بالمرض»، وبالرمز  $T$  إلى الحدث «نتيجة الاختبار إيجابية». نختار شخصاً عشوائياً.

- ① أنشئ تمثيلاً شجرياً مُحدداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص.
- ② احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختبار إيجابية.
- ③ احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض.
- ④ استنتج احتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً**، أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض.
- ⑤ أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.
- ⑥ عمّم النتائج السابقة بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي  $p$ .

①



② أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختبار إيجابية هو الحدث عندئذ  $M' \cap T$

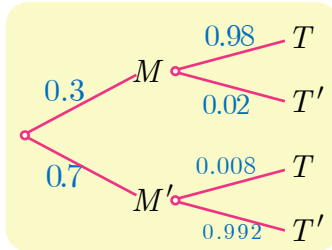
$$\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.9 \times 0.008 = 0.0072$$

③ احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض هو

$$\mathbb{P}(M \cap T') = 0.1 \times 0.02 = 0.002$$

④ يكون الاختبار موثوقاً إن أعطى نتيجة صحيحة أي وقع  $(M \cap T) \cup (M' \cap T')$ ، ومنه

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.9 \times 0.992 + 0.1 \times 0.98 = 0.9908$$



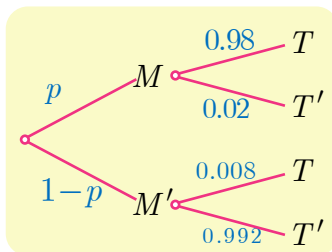
⑤ بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.

$$\text{عندئذ } \mathbb{P}(M' \cap T) = 0.7 \times 0.008 = 0.0056$$

$$\text{و } \mathbb{P}(M \cap T') = 0.3 \times 0.02 = 0.006$$

واحتمال أن يكون الاختبار موثوقاً هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.7 \times 0.992 + 0.3 \times 0.98 = 0.9884$$



⑥ بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي  $p$ .

$$\text{عندئذ } \mathbb{P}(M' \cap T) = (1 - p) \times 0.008$$

$$\text{و } \mathbb{P}(M \cap T') = p \times 0.02 = 0.02p$$

واحتمال أن يكون الاختبار موثوقاً هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = (1 - p) \times 0.992 + p \times 0.98 = 0.992 - 0.012p$$

### نشاط 3 متحوّلات عشوائية واحتمالات مشروطة

ليكن  $X$  المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد زبائن محطة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أنّ عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2. أمّا القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي  $X$  فهو كما يأتي:

$k$	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.5	0.4

يشترى كلُّ زبون إما البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6. إنّ ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن.

لنرمز بالرمز  $C_k$  إلى الحدث  $(X = k)$  تسهياً للكتابة، ولنرمز بالرمز  $E$  إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبوناً، وزبون واحد فقط، البنزين». استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

①  $a$ . احسب  $\mathbb{P}(C_1 \cap E)$ .

$b$ . علّل لماذا  $\mathbb{P}(E|C_2) = 0.48$ ، واستنتج  $\mathbb{P}(C_2 \cap E)$ .

$c$ . استنتج مما سبق قيمة  $\mathbb{P}(E)$ .

② ليكن  $Y$  المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق.

$a$ . ما هي القيم التي يأخذها  $Y$ ؟

$b$ . اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي  $Y$ .

$c$ . اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج  $(X, Y)$ .

$d$ . أياكون المتحولان العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلين احتمالياً؟

الجل

①  $a$ . لمّا كان الحدثان  $C_1$  و  $E$  مستقلين احتمالياً كان

$$\mathbb{P}(C_1 \cap E) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(E) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

$b$ . إذا وقع  $C_2$  في المحطة زبونان. وعدد الذين يشترون البنزين من بينهم هو متحول

حداني  $\mathcal{B}(2, 0.4)$ ، إذن  $\mathbb{P}(E|C_2) = \binom{2}{1} 0.4^1 0.6^1 = 0.48$  ومنه

$$\mathbb{P}(C_2 \cap E) = \mathbb{P}(C_2) \cdot \mathbb{P}(E | C_2) = 0.4 \times 0.48 = 0.192$$

$c$ .  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap C_0) + \mathbb{P}(E \cap C_1) + \mathbb{P}(E \cap C_2) = 0 + 0.2 + 0.192 = 0.392$

② a. القيم التي يأخذها  $Y$  هي  $\{0,1,2\}$

b. لنرمز بالرمز  $E_k$  للدلالة إلى الحدث  $(Y = k)$  عندئذ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_0) &= \mathbb{P}(E_0 \cap C_0) + \mathbb{P}(E_0 \cap C_1) + \mathbb{P}(E_0 \cap C_2) \\ &= 0.1 + 0.5 \times 0.6 + 0.4 \times \binom{2}{0} \times (0.4)^0 \times (0.6)^2 = 0.544\end{aligned}$$

و  $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E) = 0.392$  أما

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \mathbb{P}(E_2 \cap C_0) + \mathbb{P}(E_2 \cap C_1) + \mathbb{P}(E_2 \cap C_2) \\ &= 0 + 0 + 0.4 \times \binom{2}{2} \times (0.4)^2 \times (0.6)^0 = 0.064\end{aligned}$$

c. القانون الاحتمالي للزوج  $(X, Y)$ .

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون $X$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
قانون $Y$	0.544	0.392	0.064	

d. من الواضح أن المتحولين العشوائيين  $X$  و  $Y$  غير مستقلين احتمالياً لأن

$$\mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$$

#### نشاط 4 التوازن الصبغي

نتأمل مورثة تحمل أليلين  $A$  و  $a$ . نقول إن نبتة متماثلة الألائل عندما تحتوي على الأليلين ذاتهما على زوجين من الصبغيات المتوافقة، فتكون صيغتها الوراثية عندئذ  $AA$  أو  $aa$ ، ونقول إن النبتة متخالفة الألائل عندما تكون صيغتها الوراثية  $Aa$ . تتكاثر بعض النباتات (الترمس مثلاً) بالإلقاح الذاتي، يحدث الأمر بالنسبة إلى الخلف وكأن الإلقاح جرى بين نبتتين من الصيغة الوراثية ذاتها حيث يجري اختيار الألائل عشوائياً. نهدف إلى دراسة خلف نبتة متخالفة الألائل بالإلقاح الذاتي.

#### ① الجيل الأول

بالإلقاح الذاتي تُعطي نبتة من الصيغة  $AA$  نبتة من الصيغة ذاتها، وكذلك تعطي نبتة من الصيغة  $aa$  نبتة من الصيغة ذاتها.

اكتب احتمالات أن يكون الجيل الأول لنبتة صيغتها الوراثية  $Aa$  نبتة صيغتها الوراثية  $AA$  أو  $aa$ .

#### ② أجيال متلاحقة

نبدأ من نبتة متخالفة الألائل (من النمط  $Aa$  في الجيل 0)، ونكون أجيالاً لاحقة بالتكاثر الذاتي.



سنستعمل الرموز الآتية:

- الحدث  $(AA)_n$  : «للنبته في الجيل رقم  $n$  الصيغة الجينية AA».
- الحدث  $(Aa)_n$  : «للنبته في الجيل رقم  $n$  الصيغة الجينية Aa».
- الحدث  $(aa)_n$  : «للنبته في الجيل رقم  $n$  الصيغة الجينية aa».

ثم لنرمز  $x_n$  و  $y_n$  و  $z_n$  إلى احتمالات الأحداث  $(AA)_n$  و  $(Aa)_n$  و  $(aa)_n$  بالترتيب.

① ما قيمة كل من  $x_0$  و  $y_0$  و  $z_0$  ؟

② احسب كلاً من  $x_1$  و  $y_1$  و  $z_1$ .

③ اكتب قيمة كل من  $\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(AA)_n)$  و  $\mathbb{P}((Aa)_{n+1}|(Aa)_n)$  و  $\mathbb{P}((aa)_{n+1}|(aa)_n)$ .

ثم استعمل هذه النتائج لتثبت أنه مهما كانت قيمة  $n$  كان

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \quad \text{و} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$$

و أعط عبارة  $z_{n+1}$ .

### ③ دراسة المتتاليات $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ و $(z_n)_{n \geq 0}$

① احسب قيم  $x_n$  و  $y_n$  و  $z_n$  في حالة  $0 \leq n \leq 10$ ، يمكن استعمال الآلة الحاسبة.

② ما طبيعة المتتالية  $(y_n)_{n \geq 0}$ ؟ عبّر عن  $y_n$  بدلالة  $n$ .

③ نعرّف  $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$ ، احسب  $t_{n+1}$  بدلالة  $t_n$ . ما طبيعة المتتالية  $(t_n)_{n \geq 0}$ ؟ ثم

استنتج قيمة  $x_n$  بدلالة  $n$ .

④ احسب نهاية كل من المتتاليات  $(x_n)_{n \geq 0}$  و  $(y_n)_{n \geq 0}$  و  $(z_n)_{n \geq 0}$ .

**الحل**

$$\mathbb{P}(aa) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(aA) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(AA) = \frac{1}{4} \quad \text{①}$$

②

① لدينا نبته متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ومنه

$$z_0 = \mathbb{P}((aa)_0) = 0 \quad \text{و} \quad y_0 = \mathbb{P}((Aa)_0) = 1 \quad \text{و} \quad x_0 = \mathbb{P}((AA)_0) = 0$$

$$\text{② لدينا} \quad x_1 = \mathbb{P}((AA)_1) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad y_1 = \mathbb{P}((Aa)_1) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \mathbb{P}((aa)_1) = \frac{1}{4}$$

③ في الإلقاح الذاتي تُعطي نبته من الصيغة AA نبته من الصيغة ذاتها، ومنه

$$\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(AA)_n) = 1$$

أما إذا كان لدينا نبته متخالفة الألائل في الجيل رقم  $n$  فعندئذ

$$\mathbb{P}((Aa)_{n+1}|(Aa)_n) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}((AA)_{n+1}|(Aa)_n) = \frac{1}{4}$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((AA)_{n+1}) &= \mathbb{P}((AA)_{n+1} \cap (AA)_n) + \mathbb{P}((AA)_{n+1} \cap (Aa)_n) + \underbrace{\mathbb{P}((AA)_{n+1} \cap (aa)_n)}_0 \\
&= \mathbb{P}((AA)_{n+1} | (AA)_n) \mathbb{P}((AA)_n) + \mathbb{P}((AA)_{n+1} | (Aa)_n) \mathbb{P}((Aa)_n) \\
&= \mathbb{P}((AA)_n) + \frac{1}{4} \mathbb{P}((Aa)_n)
\end{aligned}$$

$$\cdot x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n \text{ ومنه}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((Aa)_{n+1}) &= \underbrace{\mathbb{P}((Aa)_{n+1} \cap (AA)_n)}_0 + \mathbb{P}((Aa)_{n+1} \cap (Aa)_n) + \underbrace{\mathbb{P}((Aa)_{n+1} \cap (aa)_n)}_0 \\
&= \mathbb{P}((Aa)_{n+1} | (Aa)_n) \mathbb{P}((Aa)_n) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}((Aa)_n)
\end{aligned}$$

$$\cdot y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n \text{ ومنه وأخيراً}$$

$$z_n = 1 - x_n - y_n$$



① احسب قيم  $x_n$  و  $y_n$  و  $z_n$  في حالة  $0 \leq n \leq 10$ ، يمكن استعمال الآلة الحاسبة. ماذا يمكنك القول بشأن المتتاليات الثلاث؟

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
$x_0$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$
$z_0$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$

② المتتالية  $(y_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية حدّها  $y_0$  يساوي 1 وأساسها  $\frac{1}{2}$  ومنه  $y_n = \frac{1}{2^n}$ .

③ نعرّف  $t_n = x_n + \frac{1}{2} y_n$  ونحسب  $t_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2} y_{n+1}$

$$t_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} y_n = x_n + \frac{1}{2} y_n = t_n$$

أي إنّ المتتالية  $(t_n)_{n \geq 0}$  متتالية ثابتة نحقق  $t_n = t_0 = x_0 + \frac{1}{2} y_0 = \frac{1}{2}$  ومنه

$$z_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \text{ و } x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

④ وأخيراً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

## تمارين ومسابقات

1 يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر.

- ① ما احتمال الحدث  $A$ : «للكرتين المسحوبتين اللون ذاته» ؟  
 ② ما احتمال الحدث  $B$ : «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3» ؟  
 ③ ما احتمال الحدث  $B$  علماً أنّ  $A$  قد وقع ؟

### الحل

① يقع الحدث  $A$  إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين إذن

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 + 1}{10} = \frac{2}{5}$$

② يقع الحدث  $B$  إذا كانت نتيجة تضم كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 إذن

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

③ لدينا  $\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{2}{10}$  ومنه  $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2}$

2 تلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمل الحدث  $A$ : «العدد الظاهر زوجي» والحدث  $B$ : «العدد الظاهر أولي». أياكون هذان الحدثان مستقلين احتمالياً ؟

### الحل

لما كان  $A = \{2, 4, 6\}$  و  $B = \{2, 3, 5\}$  استنتجنا أنّ  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$  و  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$  ومنه

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

إذن الحدثان  $A$  و  $B$  غير مستقلان احتمالياً.

3 تتألف عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنّه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً. نرسم

$A$  و  $B$  و  $C$  إلى الأحداث:

$A$ : «للأطفال الأربعة الجنس نفسه»،

$B$ : «هناك طفلان ذكران وطفلتان»،

$C$ : «الطفل الثالث أنثى»،

- ① احسب احتمال وقوع كل من الأحداث  $A$  و  $B$  و  $C$ .
- ② احسب  $\mathbb{P}(A \cap C)$  ثم  $\mathbb{P}(C|A)$ . أياكون الحدثان  $A$  و  $C$  مستقلين احتمالياً؟
- ③ احسب  $\mathbb{P}(B \cap C)$  ثم  $\mathbb{P}(C|B)$ . أياكون الحدثان  $B$  و  $C$  مستقلين احتمالياً؟

## الجدل

① يقع الحدث  $A$  إذا كانت الأطفال الأربعة ذكوراً أو كان الأطفال الأربعة إناثاً

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

يقع الحدث  $B$  إذا كانت الأطفال الأربعة اثنتان ذكور و اثنتان إناث ( الترتيب غير مهم وهناك  $6 = \binom{4}{2}$  طريقة لترتيب هؤلاء الأطفال )

$$\mathbb{P}(B) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

يقع الحدث  $C$  إذا كان الطفل الثالث أنثى واحتمال هذا الحدث  $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ .

② يقع الحدث  $A \cap C$  إذا كان الطفل الثالث أنثى والأطفال الأربعة من جنس واحد أي الحدث  $A \cap C$  هو الحدث الموافق لكون الأطفال الأربعة جميعها إناثاً. إذن

$$\mathbb{P}(C | A) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

ولما كان  $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$  كان هذان الحدثان مستقلين احتمالياً.

③ نصف النتائج الموافقة للحدث  $B$  تضم بنتاً بصفته طفلاً ثالثاً ونصفها الآخر يضم صبيّاً

بصفته طفلاً ثالثاً، إذن  $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{16}$  و  $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{2}$ .

ولما كان  $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$  كان الحدثان  $B$  و  $C$  مستقلين احتمالياً.

## 4

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن  $X$  المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

- ① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها  $X$ ؟
- ② احسب كلاً من  $\mathbb{P}(X = 1)$  و  $\mathbb{P}(X = 3)$ .
- ③ استنتج قيمة  $\mathbb{P}(X = 2)$ .
- ④ احسب توقّع  $X$  وانحرافه المعياري.

① مجموعة القيم التي يأخذها  $X$  هي  $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

② الحدث  $\{X = 1\}$  هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة من اللون نفسه

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

الحدث  $\{X = 3\}$  هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة واحدة من كل لون

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

③ الحدث  $\{X = 2\}$  هو الحدث المتم للحدث  $\{X = 1\} \cup \{X = 3\}$  إذن

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

④

$x$	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

وعليه

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{5}{56} + 2 \times \frac{39}{56} + 3 \times \frac{12}{56} = \frac{17}{8} = 2.125$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \times \frac{5}{56} + 2^2 \times \frac{39}{56} + 3^2 \times \frac{12}{56} = \frac{269}{56}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{269}{56} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{129}{448}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{129}{448}} \approx 0.537$$



## لنتعلم البحث معاً

### 5 احتمال مشروط

تبين دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً  $0.02$ . ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول  $25\%$  من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً  $0.05$ . ليكن  $M$  الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح»، وليكن  $D$  الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية».

يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين:

- «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»،
- «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح».

#### نحو الحل

لنبدأ بترجمة معطيات المسألة وأسئلتها إلى لغة الأحداث والاحتمالات. فضاء العينة هو جماعة الرياضيين والأحداث البسيطة (اختيار أحد الرياضيين) متساوية الاحتمال. نصّ المسألة يعطي  $P(D)$  و  $P(M)$  فما هما؟ يعطي النص أيضاً الاحتمال المشروط  $P(D|M)$  فما هي؟ أما الاحتمالان المطلوبان فهما  $P(M \cap D)$  و  $P(D|M')$ .

لنستطيع حساب  $P(M \cap D)$  بسهولة لأننا نعرف كلاً من  $P(D|M)$  و  $P(M)$ ، لنفعل ذلك.

لحساب  $P(D|M')$  نرجع إلى التعريف.

① احسب  $P(M' \cap D)$  انطلاقاً من  $P(M \cap D)$  و  $P(D)$ .

② احسب  $P(M')$  واستنتج المطلوب.

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.



من نص المسألة نجد

$$P(D) = 0.02 \text{ و } P(M) = 0.25 \text{ و } P(D|M) = 0.05$$

هنا ✨

$$\mathbb{P}(M \cap D) = \mathbb{P}(D|M) \cdot \mathbb{P}(M) = 0.25 \times 0.05 = 0.0125$$

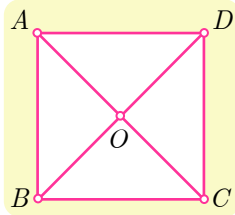
① ✨ لما كان  $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap M) + \mathbb{P}(D \cap M')$  استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D \cap M') = 0.02 - 0.0125 = 0.0075$$

② ✨ لما كان  $\mathbb{P}(M') = 1 - \mathbb{P}(M) = 0.75$  استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D|M') = \frac{\mathbb{P}(M' \cap D)}{\mathbb{P}(M')} = \frac{0.0075}{0.75} = 0.01$$

## 6 جوال عشوائي



نتأمل مربعاً  $ABCD$  مركزه  $O$ . تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من

إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

- إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي  $\frac{1}{3}$ . (فمثلاً من  $A$  يمكنها أن تنتقل إلى  $B$  أو  $D$  أو  $O$ ).

- وإذا كانت الجزيئة في  $O$  فإنها تقفز إلى أيّ من الرؤوس  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  باحتمال يساوي  $\frac{1}{4}$ .

في البدء كانت الجزيئة في  $A$ . في حالة  $n \geq 1$ ، نرمز بالرمز  $E_n$  إلى الحدث:

«الجزيئة في  $O$  بعد القفزة رقم  $n$ »، وليكن  $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ ، (إذن  $p_1 = \frac{1}{3}$ ). يطلب

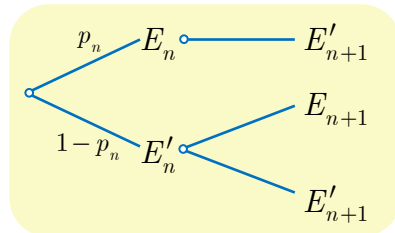
إيجاد علاقة تفيد في حساب  $p_{n+1}$  انطلاقاً من  $p_n$ ، ثمّ حساب  $p_n$  بدلالة  $n$ .

نحو الحل ✨

الاحتمال  $p_{n+1}$  هو احتمال أن تقفز الجزيئة إلى  $O$  في القفزة رقم  $n+1$ . أتوجد صلة

بين الحدثين  $E_n$  و  $E_{n+1}$ ؟ إذا كانت الجزيئة في  $O$  بعد القفزة رقم  $n$  فهل يمكنها أن

تقفز إلى  $O$  بعد القفزة رقم  $n+1$ ؟



إذن وقوع  $E_{n+1}$  مشروط بعدم وقوع الحدث  $E_n$ ،

(أي بوقوع  $E'_n$ )، إذن يمكننا إنشاء التمثيل الشجري

المبين جانباً :

① علّل الاحتمالات المكتوبة.

② لماذا لا يوجد إلا فرع واحد بعد  $E_n$ ؟

③ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع  $E'_n \rightarrow E_{n+1}$ ؟

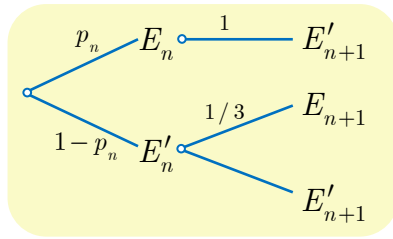
④ أثبت أنّ  $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$ .

ليكن  $\alpha$  حلّ المعادلة  $x = \frac{1}{3}(1-x)$ ، نضع  $t_n = p_n - \alpha$ . أثبت أنّ المتتالية  $(t_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول، ثمّ استنتج  $p_n$  بدلالة  $n$  واحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

أنجز الحلّ واكتبه بلغة سليمة.

الحل

- ① مجموع الاحتمالات عند كل عقدة يجب أن يساوي الواحد.  
 ② وقوع الحدث  $E_n$  يعني أنّ الجزيئة في مركز المربع  $O$  بعد القفزة رقم  $n$ ، وهي من ثمّ ستقفز إلى أحد رؤوس المربع ولن تبقى في المركز بعد القفزة  $n+1$ . إذن وقوع  $E_n$  يقتضي وقوع  $E'_{n+1}$  حتماً.  
 ③ وقوع الحدث  $E'_n$  يعني أنّ الجزيئة تحتل أحد رؤوس المربع بعد القفزة رقم  $n$ ، ومن ثمّ يمكنها القفز إلى المركز  $O$  أو إلى أحد الرأسين المجاورين في القفزة  $n+1$ . وهي تقفز إلى المركز باحتمال يساوي  $\frac{1}{3}$ . فنكتب على  $E_n \rightarrow E'_{n+1}$  الفرع الاحتمال  $\frac{1}{3}$ .



- ④ يصبح التمثيل الشجري كما في الشكل، ومن ثمّ

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{3} \times (1 - p_n)$$

العدد  $\alpha = \frac{1}{4}$  هو حلّ المعادلة  $x = \frac{1}{3}(1-x)$ . أي

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3} \times (1 - p_n) \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

وبالطرح نجد  $p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \times (p_n - \frac{1}{4})$  أو  $t_{n+1} = -\frac{1}{3}t_n$ . فالمتتالية  $(t_n)_{n \geq 1}$  هندسية أساسها  $q = -\frac{1}{3}$  وحدها  $t_1 = p_1 - \alpha = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  ومنه

$$t_n = \frac{1}{12} \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} = -\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n$$

إذن  $p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{4}$



## 7 استعمال متحولين عشوائيين

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين  $A$  و  $B$  على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام  $X_A$  يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

$x$	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام  $X_B$  قانونه الاحتمالي هو الآتي:

$x$	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان  $X_A$  و  $X_B$  مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز  $E$  إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل».

**نحو الحل**

يستغرق إنجاز المهمة زمناً عشوائياً يساوي  $X_A + X_B$ . والمطلوب هو حساب احتمال

$$. E = (X_A + X_B \leq 3)$$

① اكتب الحدث  $E$  بصيغة اجتماع أحداث منفصلة من النمط

$$(X_A = p) \cap (X_B = q)$$

② بين كيف يفيد الاستقلال الاحتمالي في حساب احتمال كل من الأحداث السابقة.

③ استنتج احتمال الحدث  $E$ .

أنجز الحل وكتبه بلغة سليمة.

الحل

$$E = \{X_A = 2, X_B = 1\} \cup \{X_A = 1, X_B = 2\} \cup \{X_A = 1, X_B = 1\}$$

إذن

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((X_A, X_B) = (2, 1)) + \mathbb{P}((X_A, X_B) = (1, 2)) + \mathbb{P}((X_A, X_B) = (1, 1))$$

ولأن المتحولين العشوائيين  $X_A$  و  $X_B$  مستقلان احتمالياً فإن

$$\mathbb{P}((X_A, X_B) = (p, q)) = \mathbb{P}(X_A = p) \cdot \mathbb{P}(X_B = q)$$

إذن

$$\mathbb{P}(E) = 0.04 + 0.06 + 0.1 = 0.2$$



## قُدماً إلى الأمام

8

يضم ناد رياضي 80 سبّاحاً، و 95 لاعب قوی، و 125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط.

① نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

a. الحدث  $A$ : «يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب القوى».

b. الحدث  $B$ : «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

② نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20%، وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a. نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي. احسب  $p_1$ : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى. احسب أيضاً  $p_2$ : احتمال أن يكون فتاة.

b. نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي. احسب  $p_3$ : احتمال أن تكون لاعبة جمباز.

الحل

①

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{138415}{4455100} = \frac{27683}{891020}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{95}{3} + \binom{125}{3} + \binom{80}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{21533}{178204}$$

② لتنامل الأحداث

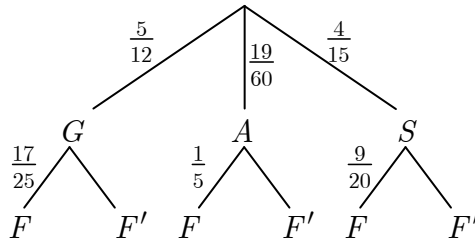
$A$ : «اللاعب لاعب قوى».

$S$ : «اللاعب سبّاح».

$F$ : «اللاعب أنثى».

$G$ : «اللاعب لاعب جمباز».

لدينا التمثيل الشجري الآتي:



والمطلوب حساب  $p_1 = \mathbb{P}(F \cap A)$  و  $p_2 = \mathbb{P}(F)$  من التمثيل الشجري نجد

$$p_1 = \mathbb{P}(F \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{19}{60} = \frac{19}{300}$$

$$p_2 = \mathbb{P}(F) = \frac{4}{15} \times \frac{9}{20} + \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{17}{25}$$

$$= \frac{3}{25} + \frac{19}{300} + \frac{17}{60} = \frac{7}{15}$$

وأخير نريد حساب

$$p_3 = \mathbb{P}(G|F) = \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{17}{25}}{\frac{7}{15}} = \frac{17}{28}$$

9 يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. نتأمل المتحول العشوائي  $X$  الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث  $(R_3)$ )، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث  $(R_2)$ )، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

① احسب  $\mathbb{P}(R_2)$  و  $\mathbb{P}(R_3)$ .

② عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$  واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(R_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12} \quad \text{①}$$

$x$	0	3	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

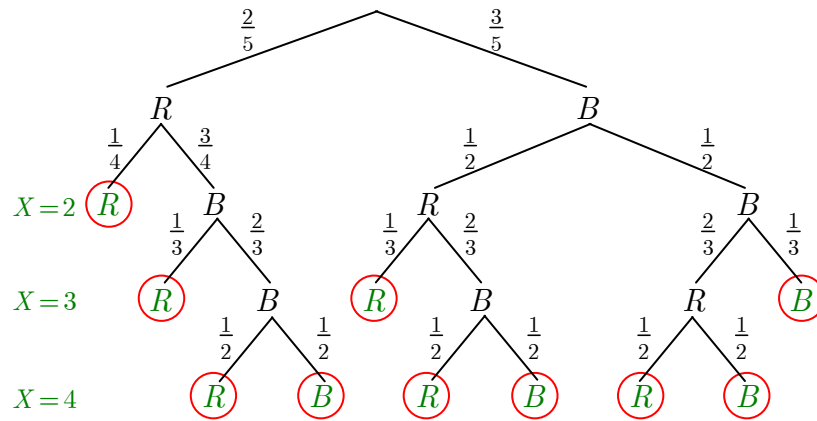
① قانون  $X$ :

$$\text{التوقع الرياضي والتباين. } \mathbb{E}(X) = \frac{5}{3} \text{ و } \mathbb{V}(X) = \frac{55}{18}.$$

10 لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرّر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته. ليكن  $X$  المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرّات السحب اللازمة. عيّن مجموعة القيم التي يأخذها  $X$ ، وعيّن قانون  $X$ ، واحسب توقعه الرياضي.

الحل

لننشئ المخطط الشجري للتجربة



نرى أنّ  $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$  وكذلك فإنّ

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{5}$$

إذن قانون  $X$ .

$x$	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

التوقع الرياضي  $\mathbb{E}(X) = 3.5$ .

**11** نُلقِ حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز  $S$  إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن  $X$  المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة  $S$  على 2، وليكن  $Y$  المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة  $S$  على 4.

- ① عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $S$ .
- ② عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين  $X$  و  $Y$ .
- ③ عيّن القانون الاحتمالي للزوج  $(X, Y)$ .
- ④ أياكون المتحولان العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلين عشوائياً؟

الحل

هنا  $S(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  والقانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $S$  هو:

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

إذن  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ ، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$  فهو:

$x$	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و  $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$  ، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي  $Y$  فهو:

$x$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

القانون الاحتمالي للزوج  $(X, Y)$ .

$X \backslash Y$	0	1	2	3	قانون $X$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون $Y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	

المتحولان  $X$  و  $Y$  غير مستقلين احتمالياً لأنّ  $\mathbb{P}(X=0, Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$ .

## 12 طائرات محركات وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إنّ احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي  $p$  وهو عددٌ موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض أنّ الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلة عن بعضها. ليكن  $X$  المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن  $Y$  المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

- ① عيّن القيم التي يأخذها  $X$ ، وقانونه الاحتمالي.
- ② عيّن القيم التي يأخذها  $Y$ ، وقانونه الاحتمالي.
- ③ يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل. احسب  $p_2$  احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها، واحسب  $p_4$  احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها.
- ④ تحقّق أنّ  $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$ ، وبيّن تبعاً لقيم  $p$  أي نوع من الطائرات يعطي وثوقية أكبر.

الحل

- ① مجموعة قيم  $X$  هي  $I = \{0,1,2\}$  و  $X$  متحوّل حداني  $\mathcal{B}(2, p)$  :  

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}; \quad k = 0,1,2$$
- ② مجموعة قيم  $Y$  هي  $J = \{0,1,2,3,4\}$  و  $Y$  متحوّل حداني  $\mathcal{B}(4, p)$  :  

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}; \quad k = 0,1,2,3,4$$

③ احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها

$$p_2 = \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p^2$$

احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها

$$\begin{aligned} p_4 &= \mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) \\ &= q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2 = q^2(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2) \\ &= q^2(1 + 2p + 3p^2) = (1 - 2p + p^2)(1 + 2p + 3p^2) \\ &= 3p^4 - 4p^3 + 1 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} p_2 - p_4 &= 1 - p^2 - 3p^4 + 4p^3 - 1 = p^2(-3p^2 + 4p - 1) \\ &= p^2(1 - p)(3p - 1) \end{aligned}$$

إذن إشارة  $p_2 - p_4$  هي من إشارة  $(3p - 1)$ ،

- في حالة  $0 \leq p < \frac{1}{3}$  لدينا  $p_2 \leq p_4$  والطائرة ذات المحركات الأربعة أعلى وثوقيه.
- أما إذا كان  $p = \frac{1}{3}$  كان للطائرتين نفس مستوى الوثوقية
- وعندما  $\frac{1}{3} < p < 1$  تكون الطائرة ذات المحركين أعلى وثوقيه من ذات الأربعة محركات.

## 13 متتاليات واحتمالات

① ليكن  $a$  عدداً حقيقياً. نتأمل المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بشرط البدء  $u_1 = a$  والعلاقة

$$\text{التدرجية } u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$$

$a$ . لتكن  $(v_n)_{n \geq 1}$  المتتالية المعرفة بالصيغة  $v_n = 13u_n - 4$ . أثبت أن  $(v_n)_{n \geq 1}$

متتالية هندسية، وعيّن أساسها، ثم عبّر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

$b$ . استنتج صيغة  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $a$ . ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

② غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. أيّاً كان العدد  $n$ ،  $(n \geq 1)$ ،

نرمز بالرمز  $E_n$  إلى الحدث: «نسي المدرّس مفتاح غرفة الصف في اليوم  $n$ ».

لنضع

$$q_n = \mathbb{P}(E'_n) \quad \text{و} \quad p_n = \mathbb{P}(E_n)$$

نفترض أنّه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم  $n$ ، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم

التالي يساوي  $\frac{1}{10}$ ، وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم  $n$ ، فإنّ احتمال أن ينساه

في اليوم التالي يساوي  $\frac{4}{10}$ .

$a$ . أثبت أنّه في حالة  $n \geq 1$  لدينا  $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$

$b$ . استنتج صيغة  $p_{n+1}$  بدلالة  $p_n$ ، ثم استفد من ① لتحسب  $p_n$  بدلالة  $n$  و  $p_1$ .

أنتعلّق نهاية المتتالية  $(p_n)_{n \geq 1}$  بقيمة  $p_1$ ؟

الحل

①  $a$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 13u_{n+1} - 4 = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n \\ &= -\frac{3}{10}(13u_n - 4) = -\frac{3}{10}v_n \end{aligned}$$

فالمتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية، أساسها  $-\frac{3}{10}$  وفيها  $v_1 = 13u_1 - 4$  وبالتالي

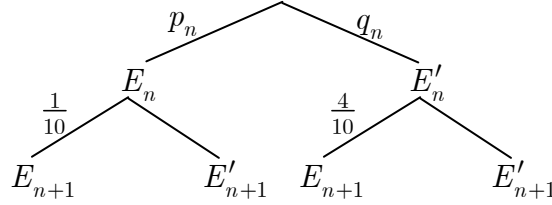
$$v_n = (13a - 4) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$b$ . بالتعويض في العلاقة  $v_n = 13u_n - 4$  نجد

$$u_n = \frac{1}{13} \left( (13a - 4) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + 4 \right) = \left(a - \frac{4}{13}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$$

ومنه  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{13}$  لأن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$

② *a.* إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم  $n$ ، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي  $\frac{1}{10}$  أي  $\mathbb{P}(E_{n+1} | E_n) = \frac{1}{10}$  وإذا لم ينس المدرس المفتاح في اليوم  $n$ ، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي  $\frac{4}{10}$ ، تعني  $\mathbb{P}(E_{n+1} | E'_n) = \frac{4}{10}$ ، إذن لدينا المخطط الشجري الآتي:



إذن

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{10} p_n + \frac{4}{10} q_n$$

*b.* ولما كان  $q_n = 1 - p_n$  وجدنا  $p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} p_n$  وبالاستفادة من ① نجد

$$p_n = (p_1 - \frac{4}{13}) \cdot (-\frac{3}{10})^{n-1} + \frac{4}{13}$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{4}{13}$  والنهاية لا تتعلق بقيمة  $p_1$ .

**14** تُكرّر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين، ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهريين. احسب احتمال كل من الحدثين  $A$ : «الحصول ثلاث مرات على وجهين  $H$ » و  $B$ : «الحصول على وجهين  $H$  مرّة على الأقل».

الحل

هذه تجربة برنولية، إذا كان  $X$  المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد مرات ظهور  $HH$  كان  $X$  حدائياً  $\mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$ . المطلوب هو  $\mathbb{P}(X = 3)$  و  $\mathbb{P}(X \geq 1)$ . ومنه

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{10}{3} (\frac{1}{4})^3 (\frac{3}{4})^7 = 10 \frac{3^8}{4^9} \approx 0.25$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^{10} = 1 - (\frac{3}{4})^{10} \approx 0.94$$

**15** تتأمّل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود، ووجهان ملوّنان بالأحمر. نقلني هذا الحجر خمس مرات على التوالي.

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أوّل مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل؟

③ ما قانون المتحوّل العشوائي  $X$  الذي يعدّ عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها؟

الحل

① ليكن  $A_n$  الحدث الموافق لظهور وجه أحمر في المرة رقم  $n$ ، وليكن  $A$  الحدث الموافق لظهور وجه أحمر أوّل مرة عند إلقاء الحجر في المرة الخامسة (الأخيرة) إذن



$$A = A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4 \cap A_5$$

ولكن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً إذن

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

② ليكن  $B$  الحدث الموافق لظهور وجه أحمر مرة واحدة على الأقل. فيكون  $B'$  الحدث الموافق لظهور اللون الأسود في المرات الخمس ومنه

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B') = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

③ احتمال الحصول على وجه أسود في المرة الواحدة هو  $p = \frac{2}{3}$ . نكرر التجربة خمس مرات، فيكون المتحول العشوائي  $X$  الذي يمثل عدد الوجوه ذات اللون الأسود التي نحصل عليها متحولاً حدانياً  $B(5, \frac{2}{3})$ . ومنه

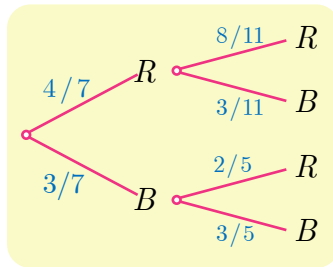
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \frac{2^k}{3^5}; \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

**16** نتأمل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب مجدداً كرة من الصندوق. لنرمز بالرمز  $R_2$  إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون»، وليكن  $R_1$  الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

- ① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.
- ② احسب احتمال الحدث  $R_2$ .
- ③ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

الحل

① التمثيل الشجري المطلوب هو



②

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{226}{385}$$

$$\mathbb{P}(R'_1 | R_2) = \frac{\mathbb{P}(R'_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

17 التجربة الأولى. نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب

عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن  $Y$  عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها  $Y$  ؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي  $Y$ .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي  $Y$  وتباينه.

التجربة الثانية. نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب

عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من

لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن  $X$  عدد

الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية. نرمز بالرمز  $R_1$  إلى الحدث: «الكرة المسحوبة

في المرة الأولى حمراء اللون».

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها  $X$  ؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي  $X$ .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي  $X$  وتباينه.

الحل

التجربة الأولى. ①  $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

②

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1 \times 4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{2 \times 6}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

وإذا أردنا يمكن أن نكتب

$y$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

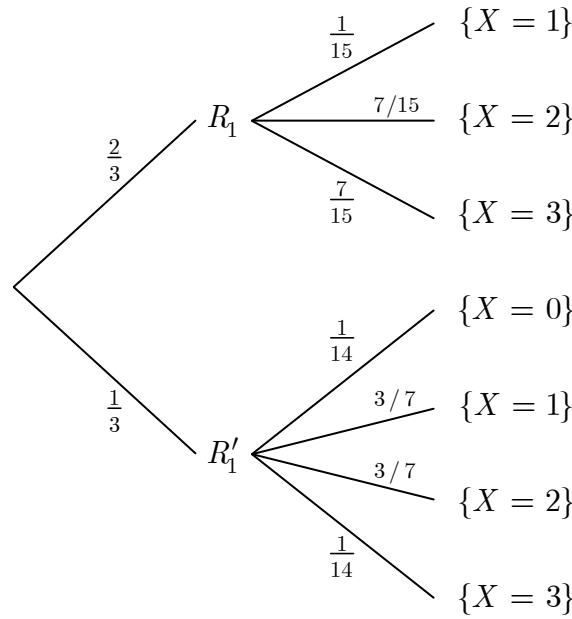
ويكون لدينا

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2 \\ \mathbb{E}(Y^2) &= 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{22}{5} \\ \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

التجربة الثانية.

①  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ . واضح أننا نسحب ثلاث كرات معاً من صندوق يحوي أكثر من ثلاث كرات حمراء. فعدد الكرات الحمراء المسحوبة يتراوح بين 0 و 3.

② لدينا  $\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$  و  $\mathbb{P}(R'_1) = \frac{1}{3}$ . والتمثيل الشجري الآتي للتجربة:



إذ نلاحظ أنه إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً سوداء أصبحت محتويات الصندوق 4 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. أما إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً حمراء فعندها تصبح محتويات الصندوق كرتين سوداوين و 8 كرات حمراء.

يتيح لنا المخطط الشجري ملء جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $X$  بيسر لنجد

$x$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{59}{315}$	$\frac{143}{315}$	$\frac{211}{630}$

ويكون لدينا

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{59}{315} + 2 \times \frac{143}{315} + 3 \times \frac{211}{630} = \frac{21}{10} \\ \mathbb{E}(X^2) &= 1^2 \times \frac{59}{315} + 2^2 \times \frac{143}{315} + 3^2 \times \frac{211}{630} = \frac{3161}{630} \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{3161}{630} - \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{3827}{6300}\end{aligned}$$



تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقِيها، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة  $\frac{1}{3}$ ، وعندما تفشل في إدخال حلقة

يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة  $\frac{4}{5}$ . نفترض أن احتمال نجاح سعاد في

إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها.

نتأمل، أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً  $n$ ، الحدثين الآتيين:

$A_n$ : « نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية  $n$  ».

$B_n$ : « فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية  $n$  ».

ونعرّف  $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ .

① عيّن  $p_1$  وبرهن أن  $p_2 = \frac{4}{15}$ .

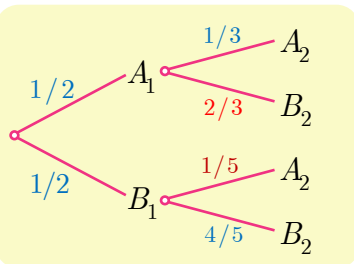
② أثبت أنه أيّاً كانت  $n \geq 2$  كان  $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$ .

③ نعرّف في حالة  $n \geq 1$  المقدار  $u_n$  بالعلاقة  $u_n = p_n - \frac{3}{13}$  أثبت أن المتتالية

$(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية وعيّن حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q$ .

④ استنتج قيمة  $u_n$  ثمّ  $p_n$  بدلالة  $n$ ، ثمّ احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

### الحل



① لأنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة الأولى يساوي

احتمال فشلها فإن  $p_1 = \frac{1}{2}$ . ولدينا المخطط الشجري المجاور

الذي يمثّل نتيجة إلقاء أول حلقتين. ومنه نستنتج أن

$$p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

② في الحالة العامة لدينا المخطط الشجري المجاور: ومنه

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(A_n) = p_{n-1} \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_{n-1} \end{aligned}$$

③ لدينا

$$u_n = p_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}u_{n-1}$$

$$\cdot u_n = \frac{2}{15} u_{n-1} \text{ أي}$$

فالمتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{15}$  وحدها  $u_1$  يساوي

$$u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

$$\cdot p_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} \text{ ومنه } u_n = \frac{7}{26} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} \text{ أي } u_n = q^{n-1} u_1 \text{ إذن } \textcircled{4}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{3}{13} \text{ إذن } \frac{2}{15} \in ]-1, 1[ \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{15}\right)^n = 0 \text{ ولكن}$$

# 8

## تصنيف لتمرين ومسائل الوحدات وفق الأهداف

نؤكد على الاهتمام بمنهجية الكتاب ومراعاة تسلسل عرض الوحدات والدروس وإبراز أهمية كل من فقرات المقدمة والانطلاقة النشطة و"تكريساً للفهم" وكذلك الأفكار الرئيسية لكل وحدة والتي جرى عرضها في فقرات **أفكار يجب تمثلها و منعكسات يجب امتلاكها والانشطة** حيث لكل منها أهميته.

تتضمن الجداول المرفقة ترتيب لتمرين ومسائل الوحدات وفق الأهداف وتحديد البعض منها لتكون مسائل عامة يمكن مناقشتها في الأسبوعين الأخيرين من الدوام .

أما تدريبات الدروس فتهدف إلى تقويم الطالب وتمكينه من المعارف لذلك يجب التركيز على الواجب المنزلي وبإمكان المدرس اختيار عدد من التدريبات لتكون أمثلة تجري مناقشتها في الحصة الدراسية وليتابع بعدها المدرس التركيز على أنشطة الوحدة كونها مزودة بأسئلة وشروحات وتوضيحات بصفتها مدخلاً لحل تمرين ومسائل الوحدة.

تصنيف تمارين ومسائل الوحدة الأولى حسب الأهداف الجزء الثاني

تسلسل	الهدف	المسائل
1	تعيين مركز أبعاد متناسبة لمجموعة نقط	1,2,21,22
2	اثبات وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة	9,10
3	اثبات وقوع أربعة نقط في مستو واحد (تحليلياً، شعاعياً)	4,12,13,25
4	اثبات تقاطع مستقيمت	5,15
5	معادلة كرة	23
6	اختيار معلم وحساب مسافة	18,20, 8,17,19
7	مقطع مجسم بمستو	7,24
8	بعد نقطة عن مستقيم	19
9	مسائل عامة	3,6,14,24,25

تصنيف مسائل الوحدة الثانية حسب الأهداف الجزء الثاني

تسلسل	الهدف	المسائل
1	الجداء السلمي لشعاعين في المستوي	1,2
2	تطبيقات مباشرة على الجداء السلمي لشعاعين في الفراغ وبعد نقطة عن مستوي	3,10
3	تعيين معادلة مستوي في الفراغ	15,4,14
4	بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متقاطعين	13,5,12
5	احداثيات نقطة تقاطع مستقيم ومستوي	6
6	تعامد مستقيم ومستوي	7,16
7	تعيين المسقط القائم لنقطة على مستو	8,17
8	تعيين نسبة مثلثية لزاوية بين قطري متوازي سطوح	9
9	معادلة كرة في الفراغ	25,23,22,21,20,19,18
10	مسائل عامة	11,26,28



## جدول تصنيف الوحدة الثالثة

المسائل	الهدف	تسلسل
1،5	اثبات وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة	1
6،8	اثبات تلاقي مستقيمت	2
3،7	تطبيق على المبرهنة 3	3
4	اثبات وقوع أربع نقط في مستو واحد	4
12،11،10،9	مسائل عامة	5

## جدول تصنيف الوحدة الرابعة

المسائل	الهدف	تسلسل
1،5	التعبير عن العدد العقدي بأشكال مختلفة	1
3	تبسيط كتابة عدد عقدي	2
2،10،11،14	حل معادلة في $\mathbb{C}$	3
4،9	خواص عدد عقدي طويلته الواحد	4
6	خواص طويلة عدد عقدي	5
13	تطبيقات علاقتا أولر	6
8،15	ايجاد محل هندسي لمجموعة نقط ممثلة لأعداد عقدية	7
16،12	مسائل عامة	8

## جدول تصنيف الوحدة الخامسة

المسائل	الهدف	تسلسل
4،8	ايجاد محل هندسي لمجموعة نقط ممثلة لأعداد عقدية باستخدام التطبيقات الهندسية	1
1،7	صورة نقطة وفق دورانين مباشرين زاويتيها $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{\pi}{3}$	2
9،10،11،3،2	اثبات تعامد مستقيمين	3
6،5	العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة	4
13،12	مسائل عامة	5

جدول تصنيف الوحدة السادسة

المسائل	الهدف	تسلسل
15،4،5،11،14	ترتيب قوائم وملء خانات	1
20،18،16،17،12،10	استعمال التوافق	2
3،2،1	اثبات صحة علاقة وحل معادلة	3
13،19،8،9،7	منشور ثنائي الحد	4
21	عبارات مثلثية	5
21،14،9	مسائل عامة	6

جدول تصنيف الوحدة السابعة

المسائل	الهدف	تسلسل
16،8،5،3،1	حساب احتمال مشروط	1
17 ، 11	متحول عشوائي	2
15،3،2	استقلال عشوائي	3
12،14،15،	متحولات عشوائية حدانية	4
4،7،9،10	حساب توقع وتباين متحولات عشوائي	5
6،13،18	احتمالات ومنتاليات	6
10،12،14،16	مسائل عامة	